

On a duality for locally compact groups

東北大 理 齋 藤 和之

§ 0. まえがき

最近辰馬氏により局所コンパクト群に対する双対定理が、
いかりの淡中双対定理の一般化として証明された。[5]
一方 W. F. Stinespring は [3] の中で作用素環における非
可換積分論の応用として、局所コンパクトユニモジュラ群に
対する作用素環的な双対定理を証明した。

本講演では、かならずしもユニモジュラでない局所コンパクト
群に Stinespring の双対定理を拡張できることを述べよう。
[8]

§ 1. 準備

Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、 μ をその上の非
負値 Radon 測度とする。

$L^\infty(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) を、それぞれ Ω 上の複素数値、

本質的有界函数, p 乗可積分函数全体とし, $C_c(\Omega)$ ($C_\infty(\Omega)$) を, Ω 上のコンパクトな台をもつ (∞ で 0 になる) 複素数値函数全体とする。

今 G を局所コンパクト群とし, μ をその上の左 Haar 測度とする。Haar 測度の理論によつて, 任意の x, y ($\in G$) に対して, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ を満す正值連続函数 Δ が存在し, これはさらに

$$(1) \quad \int_G f(xy) d\mu(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x) d\mu(x) \quad (\forall f \in L^1(G))$$

$$(2) \quad \int_G f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$$

を満す。又 $L^1(G)$ の元 f, g に対して, 合成積を

$$(3) \quad (f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y), \quad (x \in G)$$

f ($\in L^1(G)$) に対して, f^* を $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})} \Delta(x^{-1})$ (但し $\bar{a}$ は, 複素数 a の共役) と定義すれば, $L^1(G)$ は上の合成積を積とし $f \rightarrow f^*$ を対合とする Banach 代数となる。

$L^2(G)$ の元 f , G の元 s, x に対して,

$$\{\lambda(s)f\}(x) = f(s^{-1}x)$$

によつて定義された $s \rightarrow \lambda(s)$ を G の左正則表現といい,

同様に Banach 代数 $L^1(G)$ の左正則表現 $f \rightarrow \lambda(f)$ を

$$(5) \quad \{\lambda(f)g\}(x) = \int_G f(s)g(s^{-1}x) d\mu(s), \quad (f \in L^1(G), g \in L^2(G))$$

と定義する。

可換の場合と類似な公式

$$(6) \quad \lambda(f) = \int_G f(s)\lambda(s) d\mu(s) \quad (f \in L^1(G))$$

によって $f \rightarrow \lambda(f)$ はグローバルなフーリエ変換と考えることができる。(但し(6)は σ -weak 位相の意味での積分である。)

M を $\{\lambda(a), a \in G\}$ によって生成された von Neumann 代数とすれば, 作用素 $\lambda(f)$ は M に含まれ, M はそれら $\lambda(f)$ が生成する von Neumann 代数である。

今 G が可換と仮定しよう。 $L^1(G)$ の スペクトルは G の 双対群と呼ばれる局所コンパクト可換群 $\hat{G}$ になり, M は $L^\infty(\hat{G})$ を, $L^2(G)$ 上の積作用素の代数として表現することによって, $L^\infty(\hat{G})$ と空間同型になる。故に M と $L^\infty(\hat{G})$ を同一視する事により, $L^1(G)$ のフーリエ変換は $L^1(G)$ の M への埋め込みになっている。我々はフーリエ変換とその逆変換の次のような図式を得る。

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} L^1(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^\infty(\hat{G}) \\ L^\infty(G) & \xleftarrow{\hat{\mathcal{F}}} & L^1(\hat{G}), \end{array}$$

且つ $\{L^1(G), L^2(G)\}, \{L^1(\hat{G}), L^\infty(\hat{G})\}$ がともに Banach 空間として

双対系になっている。

Pontryaginの双対定理は、次の事を主張している。

$L^1(\hat{G})$ (von Neumann algebra $L^\infty(G)$ の predual) の指標全体の
つくる空間 $\hat{G}$ は局所コンパクト可換群で、はじめに与えられ
た G と位相的代数的に同型となる。

一般の場合にもどって、我々は双対対象 $\hat{G}$ は考えられないが
状況は図式(7)と同じである事がわかる。実際 M を非可換 L^∞ -
空間, predual M_* を非可換 L^1 -空間と考える。

我々の前半の目的は、predual M_* に左正則表現のテンソル
巾を使用して、等距離的対応をもつ可換な半単純 Banach 代数
の構造を入れることである。

G の表現 $x \rightarrow \lambda(x) \otimes \lambda(x)$ ($\lambda(x)$ のテンソル巾) は左正則表現
 $\lambda(x)$ の $\bar{\lambda}$ -fold copy (但し $\bar{\lambda}$ は $L^2(G)$ の次元) である。すなわ
ち表現 $x \rightarrow \lambda(x) \otimes 1$ (1 は $L^2(G)$ の単位作用素) は表現 $x \rightarrow \lambda(x) \otimes \lambda(x)$
とユニタリ同値である。この同値性を与える $L^2(G \times G)$ の上の
特別なユニタリ作用素は、

$$(8) \quad (wf)(x, y) = f(x, xy) \quad (f \in L^2(G \times G))$$

によって定義される。

$t \in M$ に対して、 $\bar{\pi}(t) = w^{-1}(t \otimes 1)w$ と定義すると、 $\bar{\pi}$ は、
 $\bar{\pi}(\lambda(x)) = \lambda(x) \otimes \lambda(x)$ ($\forall x \in G$) を満たす M から $M \otimes M$ の中への $*$ -

同型写像である。

G が可換の場合, $f \in L^1(G)$ に対して $\lambda(f)$ は f のフーリエ変換 $\hat{f}$ の $L^2(\hat{G})$ 上の積作用素に相当し, 簡単な計算から $\pi(f)$ は, 二変数関数 $\hat{f}(x, y)$ の $L^2(\hat{G} \times \hat{G})$ 上の積作用素に相当する。

$L^1(G) (= L^0(\hat{G})_*)$ の元 F, H に対して合成積 $F * H$ は,

$$\begin{aligned} (9) \quad \int_{\hat{G}} (F * H)(x) \hat{f}(x) d\hat{\mu}(x) &= \iint_{\hat{G} \times \hat{G}} F(x) H(y) \hat{f}(xy) d\hat{\mu}(x) d\hat{\mu}(y) \\ &= \int_{\hat{G} \times \hat{G}} (F \otimes H)(x, y) \pi(\hat{f})(x, y) d\hat{\mu} \otimes \hat{\mu}(x, y) \end{aligned}$$

なる式を満たす。(但し $\hat{\mu}$ は $\hat{G}$ 上の Haar 測度とする。)

この事に注意して, 一般の局所コンパクト群 G に対して, 我々は M_* の合成積を次のように定義しよう。

定義 1. M_* の元 F, H に対して, 合成積 $F * H$ を $(F * H)(t) = (F \otimes H)(\pi(t))$ ($\forall t \in M$) を満たす M_* の一意な元として定義する。

但し $F \otimes H$ は, $M_* \hat{\otimes}_{\alpha_*} M_*$ の元で, α_* は鶴丸 [6] の意味の α_0 ノルム α_0 の随伴クロスノルムとする。

次に C を $L^2(G)$ における作用素で, $(Cf)(x) = \overline{f(x)}$ ($f \in L^2(G)$) を満たすものとする。今 M の元 t に対して $\tilde{t} = CtC$ とすれば, $\lambda(\tilde{t}) = \lambda(t)$ になるから $t \rightarrow \tilde{t}$ は M の共役線型 *-自己同型写像となる。

定義 2. M_* の元 F に対して, $\tilde{F}$ を $\tilde{F}(t) = \overline{F(\tilde{t})}$ と定義する。

§ 2. 補助定理.

補助定理 1. M_* は合成積を積とし, $f \rightarrow \tilde{f}$ を等距離的対応とする可換な Banach 代数になる。

(証明) $\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(x_i), \alpha_i \text{ は複素数}, x_i \in G \}$ は M において, σ -weak 位相に関して密であるから定義 1, 2 より主張は, 明らかである。

補助定理 2. M_* の元 f に対して $\hat{f}(x) = f(\lambda(x))$ ($x \in G$) とすると $\hat{f}$ は G 上の有界連続関数であり $\overline{\hat{f}(x)} = \hat{\tilde{f}}(x)$, 且つ $\widehat{f * H}(x) = \hat{f}(x) \hat{H}(x)$ が成立する。

注意. 今後この可換な Banach 代数 M_* を $L(M)$ と書く。

補助定理 3. $L(M)$ は半単純であり, $S \otimes S = E(S)$, $S = \tilde{S}$ を満す M の元 S と $L(M)$ の自己共役な指標 σ の間に $\sigma(f) = f(S)$ ($\forall f \in L(M)$) によって与えられる一対一への対応が存在する。

(証明) σ を $L(M)$ の自己共役指標とすると σ は自動的に $L(M)$ 上の連続線型汎関数となる [例えば [2]] から $\sigma(f) = f(S)$ ($\forall f \in L(M)$) を満す M の元 S が存在する。

$L(M)$ の任意の元 f, H に対して,

$$\begin{aligned} (f \otimes H)(E(S)) &= (f * H)(S) = \sigma(f * H) \\ &= \sigma(f) \sigma(H) = f(S) H(S) \\ &= (f \otimes H)(S \otimes S). \end{aligned}$$

従って $E(S) = S \otimes S$ 。又 $f(\tilde{S}) = \overline{\hat{f}(S)} = \overline{\sigma(\hat{f})} = \sigma(f) = f(S)$

より $\tilde{S} = S$ である。

逆に $S \otimes S = \pi(S)$, $\tilde{S} = S$ と仮定する。今 σ を $\sigma(H) = H(S)$ と定義すると上の逆をなす事により σ が自己共役指標である事がわかる。

すなわち σ の自己共役指標に対して $\sigma(H) = \sigma(H)$ が成立すれば、
 $\pi(\lambda(x)) = \lambda(x) \otimes \lambda(x)$, $\lambda(\tilde{x}) = \lambda(x)$ より $H(\lambda(x)) = H(\lambda(x))$ ($\forall x \in G$)。
 又 $\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(x_i) \mid \alpha_i \text{ は複素数}, x_i \in G \}$ は M の中で σ -weak 位相に関して密であるから $H = H$ 。故に $L^1(M)$ の半単純性が証明された。
 (証明終り)

補助定理 4. $\{ H; H \in L^1(M), \hat{H} \in L^2(G) \} = L^2_1(M)$ と置き、
 $\mathcal{L} = \{ \hat{H}; H \in L^2_1(M) \}$ とする。 $\mathcal{L}$ は $L^2(G)$ で uniform 位相で密であり $L^\infty(G)$ で弱位相に関して密である。

証明) $L^1(M)$ の元 $W_{f,g}$ ($f, g \in C_c(G)$) を

$$W_{f,g}(a) = (af, g) \quad (\forall a \in M)$$

と定義すると簡単な計算から $\hat{W}_{f,g} = \bar{g} * \Delta f$ となり $W_{f,g} \in L^2_1(M)$ である。故に $\{ f * g; f, g \in C_c(G) \} \subset \mathcal{L}$ であるから、
 $\mathcal{L}$ は $L^2(G)$ で uniform 位相で密である。

$\mathcal{L}_0$ を $\{ f * g; f, g \in C_c(G) \}$ によって生成された G 上の連続関数の代数とする。 $\mathcal{L}_0$ は自己共役で、 G の点を分離するから $C_\infty(G)$ で一様位相で密、従って $L^\infty(G)$ で弱位相で密で

ある。故に $\mathcal{L}$ は $L^{\infty}(G)$ で弱位相に関して密となる。

(証明終り)

補助定理 5. $L^2(M)$ の元 F , M の元 S に対して $\widehat{FS}(a) = \widehat{F}(Sa)$ ($\forall a \in M$) と定義すると $\widehat{F_S} \in L^2(G)$ であり $\widehat{F_S} = \widetilde{S^*} \widehat{F}$ μ -a.e. である。

(証明) $S \in M$ より Kaplansky の定理から $\lambda(f_{\alpha}) \rightarrow S$ (σ -weak 位相), $\|\lambda(f_{\alpha})\| \leq \|S\|$ なる如き $L^1(G)$ の元の有向系 $\{f_{\alpha}\}$ を撰べる。

今 $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ とすると

$$\begin{aligned} (S^* \widehat{F}, g) &= \int_G \widehat{F}(x) (S \bar{g})(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{\alpha} \int_G \widehat{F}(x) (\lambda(f_{\alpha}) \bar{g})(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{\alpha} \int_G \widehat{F}(x) (f_{\alpha} * \bar{g})(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{\alpha} F(\lambda(f_{\alpha} * \bar{g})) \\ &= F(S \lambda(\bar{g})) \\ &= \int_G F(S \lambda(x)) \bar{g}(x) d\mu(x) \\ &= (\widehat{F_S}, g). \end{aligned}$$

一方 $\widehat{F_S}$ は G 上の有界連続関数であり $\widetilde{S^*} \widehat{F} \in L^2(G)$ だから,

$\widehat{F_S} \in L^2(G)$ 且 $\widehat{F_S} = \widetilde{S^*} \widehat{F}$ μ -a.e. が成立する。

(証明終り)

さて $\Gamma = \{s; s \in M, \pi(s) = s \otimes s, \hat{s} = s\}$ とすると Γ は、 M の単位球の σ -weak 位相に関してコンパクトな部分集合であるから $\hat{G} \equiv \Gamma - \{0\}$ は σ -weak 位相で局所コンパクト部分集合となる。

任意の $f, g \in L^2(G)$ に対して、

$$(10) \quad (\hat{H}f, g) = \int_{\hat{G}} H(a) d\mu_{f,g}(a) \quad (\forall H \in L^1(M))$$

を満す $\hat{G}$ 上の一意な有限 Radon 測度 $\mu_{f,g}$ が存在する。何故ならば、補助定理 3 から $L^1(M)$ は $C_\infty(\hat{G})$ の一様位相に関して密な部分代数 $\mathcal{C}$ として表現されるから $L(H) = (\hat{H}f, g)$ によって定義される $\mathcal{C}$ の一様位相による連続線型汎関数は $C_\infty(\hat{G})$ 上のものに一意に連続に拡張できる。故に (10) を満す $\hat{G}$ 上の Radon 測度 $\mu_{f,g}$ が存在する。

補助定理 6.. $L^2(M)$ の元 E, H, U, V に対して、

$$E(a) \overline{H(a)} d\mu_{\hat{U}, \hat{V}}(a) = U(a) \overline{V(a)} d\mu_{\hat{E}, \hat{H}}(a)$$

が成立する。

証明) かつてな $L^1(M)$ の元 H に対して、

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} H(a) U(a) \overline{V(a)} d\mu_{\hat{E}, \hat{H}}(a) &= \int_{\hat{G}} (H * U * \tilde{V})(a) d\mu_{\hat{E}, \hat{H}}(a) \\ &= (\widehat{H * U * \tilde{V} \cdot \hat{E}}, \hat{H}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\hat{H} \hat{U} \bar{\hat{V}} \hat{E}, \hat{H}) \\
&= (\hat{H} \hat{E} \bar{\hat{H}} \hat{U}, \hat{V}) \\
&= \int_{\hat{G}} H(a) E(a) \overline{H(a)} d\mu_{\hat{U}, \hat{V}}(a).
\end{aligned}$$

$L^1(M)$ が半単純であるから $U(a) \overline{V(a)} d\mu_{\hat{E}, \hat{H}}(a) = E(a) \overline{H(a)} d\mu_{\hat{U}, \hat{V}}(a)$ が成立する。

(証明終り)

補助定理 7. 次の (i) (ii) を満す $\hat{G}$ 上の非負値 Radon 測度 $\hat{\mu}$ が存在する。

$$(i) \quad (\hat{E}, \hat{H}) = \int_{\hat{G}} E(a) \overline{H(a)} d\hat{\mu}(a), \quad E, H \in L^1_2(M),$$

$$(ii) \quad \int_{\hat{G}} H(a) d\mu_{\hat{E}, \hat{H}}(a) = \int_{\hat{G}} H(a) E(a) \overline{H(a)} d\hat{\mu}(a), \quad H \in L^1(M).$$

証明) $L^1_2(M)$ の元 H に対して $U_H \equiv \{s; s \in \hat{G}, H(s) \neq 0\}$ とすると, $L^1_2(M)$ が $L^1(M)$ で弱位相で密より $\{U_H; H \in L^1_2(M)\}$ は $\hat{G}$ の σ -weak 位相による開被覆である。

各々の $f \in C_c(U_H)$ に対して,

$$(ii) \quad \mu_H(f) = \int_{\hat{G}} \frac{f(a)}{|H(a)|^2} d\mu_{\hat{H}, \hat{H}}(a)$$

と定義すると U_H 上の非負値 Radon 測度 μ_H ができる。もし $\hat{G}$ 上の連続関数が, そのコンパクトな台を $U_H \cap U_{\bar{H}} (E,$

$f \in L^2(M)$ の中にもつてゐるとすると補助定理 6 から $\mu_E(f) = \mu_H(f)$ である。従つて $\{U_H, \mu_H, H \in L^2(M)\}$ は μ_H の制限が μ_H であるような $\hat{G}$ 上の非負値 Radon 測度 $\hat{\mu}$ を定義する。[例えば [1], 第一章, §3 命題 1 参照]

(ii) 式により $d\mu_{E, \hat{H}}(a) = E(a) \overline{H(a)} d\hat{\mu}(a)$ ($E, H \in L^2(M)$) が成立。故に (ii) が示された。

$\mu_{E, \hat{H}}$ は $\hat{G}$ 上の測度が有限であるから $E \in L^2(M)$ の $\hat{\mu}$ に関する 2 乗可積分性がいえる。又 $L(M)$ の半単純性により, $\|H_\alpha\|_\infty \leq 2$, 且つ $\hat{G}$ 上のコンパクト収束位相に関して $H_\alpha \rightarrow 1$ なる如き $L(M)$ の元の有向系 $\{H_\alpha\}$ が存在する。等式 (ii) により,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} H_\alpha(a) |H(a)|^2 d\hat{\mu}(a) &= \int_{\hat{G}} H_\alpha(a) d\mu_{\hat{H}, \hat{H}}(a) \\ &= \int_G \hat{H}_\alpha(x) |\hat{H}(x)|^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

故に $(\hat{H}, \hat{H}) = \int_{\hat{G}} |H(a)|^2 d\hat{\mu}(a)$ となり (i) が成立する。

(証明終り)

補助定理 8. M_P を M の射影作用素全体とすると $M_P \cap P = \{0, 1\}$ である。

証明) $M'(M \text{ の交換子 }) \supset \{f(x); x \in G, x \rightarrow f(x) \text{ は } G \text{ の右正則表現}\}$ であるから $e \in P \cap M_P$ に対して $(1-e)L^2(G) = \mathcal{M}$ といふと閉部分空間 $\mathcal{M}$ は右移動に関して不変である。

次に $L^\infty(G)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ を示そう。そのためには補助定理4から $\mathcal{L}_e\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ を示せば充分である。 $e^* = e$ より $H \in L^2(M)$ に対して補題5から $e\hat{H} = \hat{H}e$ (μ -a.e.) であり $e\hat{H} \in L^\infty(G)$ である。又 $H \in L^2(M)$ に対して,

$$e(\hat{H}\hat{H}) = (e\hat{H})(e\hat{H}) \quad \mu\text{-a.e.}$$

何故ならば,

$$\begin{aligned} (H * H)(e(\lambda(x))) &= (H * H)(e\lambda(x)) \\ &= (H \otimes H)(\Xi(e\lambda(x))) \\ &= (H \otimes H)((e\lambda(x)) \otimes (e\lambda(x))) \\ &= H(e\lambda(x)) \cdot H(e\lambda(x)). \end{aligned}$$

故に $e(\hat{H}\hat{H}) = (e\hat{H})(e\hat{H})$ μ -a.e. である。一方 $\mathcal{L}_e$ が $L^2(G)$ で一様位相で密であるから $e(\hat{H}g) = (e\hat{H})eg$ ($\forall g \in L^2(G)$) が成立する。従ってもしも $g \in \mathcal{M}$ とすると $e\hat{H}g = 0$ すなわち $\mathcal{L}_e\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ 。[例えば [7] p.42. 第二章参照] により $e = 1$ 又は 0 である。

(証明終り)

補助定理9. $\hat{G}$ の元は M のユニタリ作用素になり, 作用素の積に関して σ -weak 位相で局所コンパクト群である。又 $\hat{\mu}$ は、その左 Haar 測度となる。

証明) $\hat{G}$ の元 s , $L_2(M)$ の元 E, F に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} E(sa) \overline{F(a)} d\hat{\mu}(a) &= (\hat{E}_s, \hat{F}) = (s\hat{F}, \hat{E}) \\ &= (\hat{E}, s\hat{F}) \\ &= \int_{\hat{G}} E(a) \overline{F(s^{-1}a)} d\hat{\mu}(a). \end{aligned}$$

補助定理 3 によって, $(C(\hat{G}))$ の元 f, g に対して,

$$(12) \quad \int_{\hat{G}} f(sa) g(a) d\hat{\mu}(a) = \int_{\hat{G}} f(a) g(s^{-1}a) d\hat{\mu}(a)$$

が成立する。

次に $\hat{G}$ の任意の σ -weak 位相に関してコンパクトな集合 K に対して $H \equiv \{t; t \in \hat{G} \text{ } st \in K\}$ が又 σ -weak 位相に関してコンパクトになる事を証明しよう。

まず $s \in \hat{G}$ に対して, $x \in M \rightarrow sx \in M$ なる写像が一対一で, σ -weak 位相で連続である事を示そう。ある $x (x \in M)$ に対して $sx = 0$ とすると $s^*sx = 0$ より $s \geq 0$ と仮定して一般性を失なわぬ。($\hat{G}$ は積に関して閉じている。) 又任意の自然数 n に対して s^n (s の正の n 乗根) は $\hat{G}$ の元である。そして s^n は s の支持射影作用素 e に s -位相で収束するから $e \in \hat{G}$ であり, 補助定理 8 により, $e = 1$ である。故に $x = 0$ 。

この写像が σ -weak 位相で連続な事は, 明らかであるから, $sH = (s\hat{G} \cup \{0\}) \cap K$ が $\hat{G} \cup \{0\}$ の σ -位相に関してコンパクト

コンパクトな部分集合である事に注意して, H は $\hat{G} \cup \{0\}$ で σ -weak 位相でコンパクトである。又 H の元の有向系 $\{x_\alpha\}$ が 0 に (σ -weak 位相で) 収束するなら $s x_\alpha \rightarrow 0(\sigma)$ である。しかるに, $s t_\alpha \in sH = K$ 。これは矛盾である。故に H は $\hat{G}$ の σ -weak 位相による閉部分集合となる。

今 $C_c(\hat{G})$ の元 f の台 K に対して上に述べた事により, $f(t)=1$ ($st \in K$) $f(st)=1$ ($t \in K$) なる如き $C_c(\hat{G})$ の元 g が存在する。(12)式によって,

$$\int_{\hat{G}} f(st) d\hat{\mu}(t) = \int_{\hat{G}} f(t) d\hat{\mu}(t) \quad (\forall f \in C_c(\hat{G})).$$

故に $L^1(M)$ の元 E, F に対して $\hat{G}$ の元 s をとれば,

$$\begin{aligned} (s^* \hat{E}, s^* \hat{F}) &= \int_{\hat{G}} E(sa) \overline{F(sa)} d\hat{\mu}(a) \\ &= \int_{\hat{G}} E(a) \overline{F(a)} d\hat{\mu}(a) \\ &= (\hat{E}, \hat{F}). \end{aligned}$$

補助定理 4 から $(ss^* f, g) = (f, g)$ ($\forall f, g \in L^2(G)$) が成立するから $ss^* = 1$ 又同様にして $s^* s = 1$ である。故に s はユニタリ作用素で, $\hat{G}$ は左 Haar 測度 $\hat{\mu}$ をもつ, 作用素の積を群の演算とする σ -weak 位相に関する局所コンパクト群である。

(証明終り)

§ 3. 定理.

定理. (双対定理) 上に構成された局所コンパクト群 $\hat{G}$ は, 最初に与えられた局所コンパクト群 G と位相的, 代数的に, 同型である. この同型写像は $x \in G \rightarrow \lambda(x) \in \hat{G}$ により与えられる.

証明) 写像 $x \in G \rightarrow \lambda(x) \in \hat{G}$ が G から $\hat{G}$ 上への同型写像である事を示そう. まずこれが G から $\hat{G}$ の中への一対一連続な写像であることは知られている. これが位相同型写像であることをいうには, $\hat{G}$ 上で σ -weak 位相と s -位相とが一致するから次の事を示せば充分である. V を G の単位元の任意に与えられたコンパクトな近傍とする. f を $\|f\|_2 = 1$, $\text{supp.}(f) \cdot i \text{supp.}(f) \cdot i^{-1} \subset V$ なる如く選ぶ. 今 $\|\lambda(a)f - f\|_2 < 1$ ならば $a \in V$ なることが容易に確かめられる. 従ってこの写像が上への写像であることをいえば, 定理の証明は終る.

上の写像による G の像を G' とすると G' は $\hat{G}$ の閉部分群である. 今 $\hat{G}$ 上の非負値 Radon 測度 ν を

$$\int_{\hat{G}} f(s) d\nu(s) = \int_G f(\lambda(x)) d\mu(x) \quad (f \in C_c(\hat{G}))$$

と定義する. $\mathcal{D} = \{f(s) \mid f(s) = \bar{H}(s) \text{ } H \in L^1_2(M)\}$ $\mathcal{D}^\perp = \{\sum_{j=1}^n f_j \bar{g}_j \mid f_j, g_j \in \mathcal{D}\}$ と置く. 今 $f \in \mathcal{D}^\perp$ とすると, $f = \sum_{j=1}^n g_j \bar{h}_j$ 但し $g_j(s) = G_j(s)$, $h_j(s) = H_j(s)$, $G_j, H_j \in L^1_2(M)$, $s \in \hat{G}$.

[1.11] の定義から $f \in L^1(\hat{G}, \nu)$ であり,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} f(s) d\nu(s) &= \int_G f(\lambda(x)) d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_G \hat{G}_j(x) \hat{H}_j(x) d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{G}_j, \hat{H}_j). \end{aligned}$$

さらに $t \in \hat{G}$, $E \in L^1_2(M)$ に対して, 補助定理 5 から $\widehat{E_{t*}} = t\hat{E}$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} f(t*s) d\nu(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} (t\hat{G}_j, t\hat{H}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{G}_j, \hat{H}_j) \\ &= \int_{\hat{G}} f(s) d\nu(s). \end{aligned}$$

[例えば [3] 系 1.4.] を ν とその左移動に應用して ν が $\hat{G}$ 上の左 Haar 測度となり ν が G' 上に集中しているから $G' = \hat{G}$ である。

(証明終り)

注. 以上の議論で我々は $\tilde{u} = u$, $u \otimes u = \overline{\pi}(u)$ と仮定したが実は, $u \otimes u = \overline{\pi}(u)$ のみから u がユニタリ作用素且つ $\tilde{u} = u$ がでてくる。故に $L^1(M)$ の指標は自己共役である。しかしこの事は略す。

なお P. Eymard [L'algebre de Fourier d'un groupe localement compact; Bull. Soc. math. France, 92 (1964) pp 181-236]

は、 $L^1(M)$ の逆変換 ($f \in L^1(M)$ に対して $\hat{f}$ としたもの)全体をつくる
 $C_\infty(G)$ の部分代数に $L^1(M)$ によるノルムを入れ、Fourier algebra
 と名づけ (可換の場合との類似性により $A(G)$ と書く)、この $A(G)$
 を使用して G 上の調和解析を展開しているものであるがその中
 で我々の定理を別の方法で導いている。詳細は原論文にゆず
 る。

以上。

References

- [1] N. Bourbaki; *Intégration*, Paris, (1952).
- [2] L. H. Loomis; *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York, (1953).
- [3] W. F. Stinespring; *Integration theorems for gages and duality for unimodular groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90(1959), 15-56.
- [4] M. Takesaki; *A characterization of group von Neumann algebras of locally compact unimodular groups as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem*, To appear.
- [5] N. Tatsuuma; *A duality theorem for locally compact groups*, *J. Math. Kyoto Univ.*, 6(1967), 137-293.
- [6] T. Turumaru; *On the direct product of operator algebras III*, *Tôhoku Math. J.*, 6(1954), 208-211.
- [7] A. Weil; *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, (1938).
- [8] K. Saitô; *On a duality for locally compact groups*, To appear in *Tôhoku Math. J.*.