

連続的非同期式回路理論 の諸問題

東工大理 情報科学科 木村 泉

Muller らが導入した非同期式回路の理論 [1, 2] は, 非同期式電子計算機の論理設計のための道具を提供しよう, という目当てをもつものであったから, それが有限集合の上を走る離散的なシステム変数(主として2値的な)に基づいて組み立てられていたことは, いかにももっともなことであった. しかし彼らの与えた理論的結果は, システム変数の変域に関する上記限定を必ずしも本質的な形で使ってはならず, むしろそのかなりの部分については, システム変数を一般の位相空間の上を走るものとした方が自然な定式化が得られるのではないか, と思われるふしがあった. そして, このことが事実であることは, すでに [3] においてある程度示した通りである.

本文は二つの目的を有する. 才1は, Mullerら [1] の, いわゆるC状態(積算状態)の理論を, ホモトピーふうの構成

を考えることによって, [3] のわくぐみの中に移し植えよう, というところみについてスケッチふう述べることである. その才2は, [3] において特にシステム変数の変域としてユークリッド空間を考えたとき, 理論がどのように「見える」かについて若干の直観的考察をこころみることである. 以下, 才2点についてまず論じ, 才1点についてはあとから触れることにする.

§1. ユークリッド空間上の非同期式回路理論

まず準備として, [3] において, 基礎となる空間をユークリッド空間であるとした場合に理論がどのような形をとるかを書き出してみることにする. 以下しばらく紙中節約のため敢えて「高飛車」な書き方をするが, 次郎で直観的説明を与えるので諒とされたい.

定義 1.1. 本文において回路 C とは, 自然数 n と関数 $f: E^n \rightarrow E^n$ の組 (n, f) のことである. ただし E^n は n 次元ユークリッド空間. $f(z)$ を z' と書き, また f を,

$$(1.1) \quad \begin{cases} z'_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \\ \dots\dots\dots \\ z'_n = f_n(z_1, \dots, z_n), \end{cases}$$

のように書きあらわす. ここで $x \in E^n$.

注意 1.1. 回路は [3] ではある四つ組として定義されているが, 本文で論ずる特別の場合においては上のような定義で十分である. 以下一々断らないが同様の事情は繰り返しあらわれる.

記号 1.1. $a, b, c \in E$ とする. (E は実数の全体) そのとき $a \leq b \leq c$ または $a \geq b \geq c$ なることを記号 $\langle a, b, c \rangle$ であらわす. また $x, y, z \in E^n$ と $1 \leq i \leq n$ に対し, $\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ の代りに $\langle x, y, z \rangle_i$ と書く. さらに, すべての i に対して $\langle x, y, z \rangle_i$ なることを, $\langle x, y, z \rangle$ であらわす.

記号 1.2. 以下 $C = (n, f)$ を定義 1.1 の通りとする. 一般に $x, y \in E^n$ に対し, $\langle x, y, x' \rangle$ なることを $x \mathcal{R} y$ であらわす. また $\langle x, y, x' \rangle_i$ なることを $x \mathcal{R}_i y$ と書くことがある.

定義 1.2. 関数 $\xi: E \rightarrow E^n$ が C の $\mathcal{R}$ 列 であるとは, 任意の有界区間 $I = [a, b]$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在し, $t \in I$ にわたって

(i) ξ は区間 $[t, t + \varepsilon]$ で (各 i ごとに) 単調, かつ

(ii) $\xi(t) \mathcal{R} \xi(t + \varepsilon)$

なることである.

注意 1.2. ξ が $[t, t+\varepsilon]$ で各 i ごとに単調とは、
 かつしくは $t \leq t_1 \leq t_2 \leq t+\varepsilon$ とすべての i に対して
 $\langle \xi(t), \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle_i$ なることを言う。(記号 1.1 に
 より、 $\langle \dots \rangle_i$ の代りに、“すべての i に対して”を省い
 て単に $\langle \dots \rangle$ と書いてもよい)。なお一般に (i), (ii)
 から、 $t \leq t_1 \leq t+\varepsilon$ に対して $\xi(t) \mathcal{R} \xi(t_1)$ 。

注意 1.3. $I = [a, b]$ について定める定義 1.2
 の ε を $\varepsilon = e(a, b)$ とあらわし、 $e \in \xi$ の(一つの)特性
時間関数 と言う。 e は b について単調非増大、 a について単
 調非減少と仮定してさしつかえない。

定義 1.3. η を関数 $\eta: E \rightarrow E^n$ とするとき、その集
 合的極限を $\eta(\infty)$ であらわす。すなわち

$$\eta(\infty) = \bigcap_{t_0} \overline{\{\eta(t) \mid t \geq t_0\}}$$

ただし上線は閉包演算をあらわす。 $\eta(\infty)$ は、ある $t_n \nearrow \infty$
 なる数列 $\{t_n\}$ によって $\eta(t_n) \rightarrow \alpha$ となる α の全体である
 と言ってもよい。

定義 1.4. E^n の部分集合 T が しに関して安定 とは、
 もし $c, d \in E$ に対し、 $z \in T$ にわたって

$$z_i = c \quad \text{かつ} \quad \langle z_i, d, z'_i \rangle$$

であるならば実は $c = d$ となることを言う。また T がすべて

のしに属して安定のとき, Γ は安定であると言う.

定義 1.5. $\xi: E \rightarrow E^n$ が C の許容列であるとは, それが C の $\mathcal{R}$ 列であり, しかも $\xi(\infty)$ が安定なることを言う.

例 1.1. $n=1$, $f_1(z_1) = 1$ とする. (E^1 の元を E の元と同一視し),

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \text{ のとき,} \\ 1 & t > 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$\eta(t) = 1 - e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\zeta(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

とみると, ξ, η は C の許容列である. ζ は C の $\mathcal{R}$ 列ではあるが許容列ではない.

注意 1.4. $\mathcal{R}$ 列, 許容列の変域を E 全体にわたるとしているのは別段本質的なことではなく, 単にあとあと記号法上多少便利だからにすぎない. [3] でしているように変域を右半直線 $[0, \infty)$ に限っても話は同じである.

記号 1.3. $u \in S$ に対し, $\xi(0) = u$ となるような C の許容列の全体を $X[u]$ であらわす. また

$$X^\infty[u] = \{ \xi(\infty) \mid \xi \in X[u] \} \quad \text{と書く.}$$

記号 1.4. $x, y \in E^n$ に対し, 許容列 ξ ($\mathcal{R}$ 列 ξ と言っても同じ) と $t_1, t_2 \in E$ が存在して, $\xi(t_1) = x$, $\xi(t_2) = y$, $t_1 \leq t_2$ となるとき, $x \preceq y$ と書く.

命題 1.1. $x \neq y$ なるための必要かつ十分条件は、有限個の点 $x(0), x(1), \dots, x(l) \in E^n$ が存在して

$$x = x(0) \mathcal{R} x(1) \mathcal{R} \dots \mathcal{R} x(l) = y$$

となることである。(ただし $l \geq 0$).

定義 1.6. C が $u \in E^n$ に関して 速度不感 とは、 $u \neq x$ なるすべての $x \in E^n$ に対して $X^\infty[u] = X^\infty[x]$ なることである。

定義 1.7. C が $u \in E^n$ に関して semimodular とは、 $u \neq x, x \mathcal{R} y$ なるすべての $x, y \in E^n$ について $y \mathcal{R} x'$ (すなわち $\langle y, x', y' \rangle$) となることである。

定理 (Muller) C において f を連続とするとき、 C が $u \in E^n$ に関して速度不感であるための一つの十分条件はそれが u に関して semimodular なることである。

注意 1.5. 上定理は、Muller らが [1] に与えたものの、ユークリッド空間上における一つの analogue を与えているものである。[3] には上定理と Muller らの原定理の、いわば topological closure に相当する結果が与えられている。

§2. 解釈と問題点

さて話題を転じて、次のような連立微分方程式を考えてみよう。(ただし $i = 1, 2, \dots, n$).

$$(2.1) \quad dz_i/dt = \varphi_i(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

このようなものは、たとえば電子的素子をつなぎあわせてできる電子回路の挙動をしらべたい、というようなときに出てくるはずのものである。そしてたいていの応用においては、(2.1)の右辺の φ_i は、少なくとも原理的には完全に知られた関数であるとみなして差支えない。

しかしながら、ある場合には、たとえば素子の経年変化に対応して、 φ_i の形が時とともに少しずつ変わってゆく、ということも考えられる。その場合は問題が複雑化し、

$$(2.2) \quad dz_i/dt = \varphi_i(z_1, z_2, \dots, z_n; t)$$

と言ったものが必要になってくる。

とは言っても、いきなり(2.2)を扱おうとすると話が複雑化しすぎることが多い。また(2.2)において φ_i が t にどのように依存するか、そもそも知られていないという場合も十分あり得る。たとえば経年変化の問題などはそのようにとらえた方がむしろ自然であるし、また取り扱おうとして

いる体系の数学的模型自体が近似的で、ある種の制御しかたないパラメータを無視しているために、本来は(2.1)のような式を書き得るはずのところ(2.2)でかき止まらなければならない、というようなことも考えられる。そのような場合は φ_i の t への依存性如何はますます知りがないものとなる。

そこで、 φ_i の形についてある限られた範囲の情報しか得られないとき、その限りで何が言い得るのかを考察してみることは興味ある問題である。いま、その一つの特別の場合として、われわれの方程式が次の形をしているという場合を考察してみよう。

$$(2.3) \quad dZ_i/dt = \alpha_i(t) \varphi_i(Z_1, \dots, Z_n).$$

ここで α_i, φ_i は十分滑らかとし、 $\overbrace{\alpha_i \geq 0, \int_0^\infty \alpha_i(t) dt = \infty}^{\varphi_i \text{ は有界, かつ}}$ とする。そして、 φ_i ははっきり知られているか、 α_i については上記のことしかわからない、としてみるのである。

ここで注意すべきは、 α_i が i ごとに個別に与えられていることである。これがもし $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \dots = \alpha_n(t)$ となっていたとすれば、問題はほとんど trivial であると言える。というのは、その場合、方程式(2.3)は、(2.1)の解を“めちゃくちゃに狂った時計”を使って観測

したものに他ならないからである。したがってこの場合われわれは(2.3)であらわされる体系がどこをどのように通って動いて行くかを知っているが、その変化がどの位の速さで起るかは全く知らない、ということになる。一言にして言えば、われわれが知っているのはトラジェクトリであり、そしてそれ以上でもそれ以下でもない。

むしろわれわれが問題にしているのは、 α_i がしごとに異なっている場合である。いわば体系の各構成要素がそれぞれ別の“めちゃくちゃな時計”を持っている場合が問題なのである。もちろんこの場合も、最終的に問題にできるのはトラジェクトリだけであるが、その上時計が“自由化”されている結果として、可能なトラジェクトリが一般に無限に多く生じてくる。体系の構成要素1の時計は、構成要素2の時計より、あるときは速く、またあるときは遅く動くであろう。われわれは、そのようにして生ずる種々のトラジェクトリの全体を、なんとかうまく特徴づけたいと思うのである。

このことを(ある意味で近似的に)おこなうのには、§1の構成が役立つ。いま、(2.3)であらわされるわれわれの体系が、時点 $t = t_0$ において点 $z = z(t_0) \in E^n$ に居たとし、手はじめとして各 i に対して $\varphi_i(z_1, \dots, z_n) > 0$ となっていた、という場合を考えよう。このとき、各 φ_i は点 z

のある近傍 $\mathcal{X}$ において正の符号をとる。(φ_i は十分滑らかだから) . そこで

$$(z_1 + \varepsilon_1, z_2 + \varepsilon_2, \dots, z_n + \varepsilon_n) \in \mathcal{X}$$

となるように $\varepsilon_i > 0$ を選べば, $z = z(t_0)$ においてわれわれの体系の各構成要素がしようとしていることは, z_i から $z_i + \varepsilon_i$ に向って変化することだと言えてしまつかない. もっとも α_i は不明であるから, その変化の速さは i ごとにまちまちであり, どの i について z_i が一番早く $z_i + \varepsilon_i$ に達するかはもちろんわからない. (しかし仮定 $\int_0^\infty \alpha_i(t) dt = \infty$ によって, そのようなことは遅かれ早かれどれかの i について起るであろう).

さて一般には, φ_i の中には正のものも負のものも 0 のものもあるであろう. そのときは φ_i のうち 0 でないものが一定符号をとるような点の軌道を $\mathcal{X}$ とすればよい. そして点 $(z_1 + \varepsilon_1, \dots) \in \mathcal{X}$ の代りに点

$$(z_1 + \sigma_1 \varepsilon_1, z_2 + \sigma_2 \varepsilon_2, \dots, z_n + \sigma_n \varepsilon_n) \in \mathcal{X}$$

を考えれば一応上と同様のことが言える. ここで σ_i は, φ_i の正, 負, 零に応じて 1, -1, 0 とする. またひきつづき $\varepsilon_i > 0$ であり, z_i は今度は $z_i + \sigma_i \varepsilon_i$ に向って変化するのである.

ところでこの $z_i + \sigma_i \varepsilon_i$ は, (ε_i をどうとるかの自由度

$\xi(t)_i$ はたしかに単調に増し, また減ってゆく. また (2.3) においては条件 $\int_0^\infty \alpha_i(t) dt = \infty$ によつて, z_i の値がいくらでも大きく (または小さく) なるが, 許客列でも $\xi(\infty)$ の安定性によつて, $\xi(t)_i$ の値はいくらでも大きく (または小さく) なる. よつてこのとき, (2.3) の解と (2.4) の許客列の間の対応は完全である.

問題は空間のどこかで $\varphi_i = 0$ となるときである. やれわれの体系がそのような点の一つにやつてきたとする. ここでもし全部の j について $\varphi_j = 0$ であるならば, (2.3), (2.4) のどちらから見ても, z_i または $\xi(t)_i$ はもはやふえも減りもしないから, やはり対応は完全である. だがもしある j については $\varphi_j \neq 0$ であるとするとき, (2.3) において z_j は φ_j の正負に応じて, やがて増加しはじめたり減少しはじめたりする. すると一般には φ_i も, やがて 0 でなくなるであらう. そしてそれに応じて z_i も, ふたたび動き出す. この事情は対応する (2.4) の $\xi(t)_i$ についても全く同じであるが, たゞ z_i または $\xi(t)_i$ の動き出し方が必ずしも同じでない. (2.3) では, ある $z = z(t_0)$ で $\varphi_i(z) = 0$ であり, しかもどんなに小さく $\varepsilon > 0$ をとっても $z(t_0 + \varepsilon)_i \neq z(t_0)_i$ となる, というようなことがあり得るが, (2.4) では定義 2.5 の条件 (ii) によつて, もし $\xi(t_0)_i = \xi(t_0)_i'$ であれば

を別とすれば) 各の関数としてさだまると考えてよい. その関数を f_i であらわし, §1 の定義 1.1 にならうて

$$(2.4) \quad \begin{cases} z'_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \\ \dots\dots\dots \\ z'_n = f_n(z_1, \dots, z_n), \end{cases}$$

と書くことにすれば, われわれの“めちやくちゃん時計”をもつ体系について使用できる情報は一応ことごとく (2.4) 式に含まれていると考えられる. なお明らかに f_i は連続と仮定して差支えない.

ここで (2.4) を §1 の (1.1) とみたとき, もし可能な許容列 (定義 1.5) の全体が, われわれの体系の可能なトラジェクトリ (をパラメタ表示であらわしたもの) の全体に一致していたとすれば大変ぐわいかな. このことは次の二つの点において成立しないが, しかしある意味で近似的には成立つと言える.

才 1. 点かもつとも重要である. もし (2.3) において $\varphi_i = 0$ になることが決してなかったとすれば, φ_i の符号は全空間にわたって一定である. したがってそのとき, (2.3) の解においては, α_i の如何にかかわらず z_i の値はつねに増し, または減じてゆくことになる. 一方このとき, 定義 1.2 の条件 (ii) によつて, われわれの許容列系において

ある $\varepsilon > 0$ に対し, $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ にわたって $\xi(t)_i = \xi(t_0)_i$ でなければならぬ. 直観的に言えば, (2.4) では素子 i が動き出せ, と言われてから本当に動き出すまでに, 微少な, しかし 0 でない時間がかかるのである. このように (2.4) は, いわばまさつの多い体系に適し, エネルギー損失の少ない体系には必ずしもふさわしくないのである.

才 2 点として, われわれの ξ が連続関数とは限らない, ということが挙げられる. 例 1. 1 の ξ がそうであるように, 許容列は不連続点を含むかもしれない. これに対し, (2.3) の解は, α_i, φ_i を十分滑らかとしている関係上必然的に連続関数となる. この不一致は実は意識的に仕組まれたものであって, [3]において時間軸を連続的とし, しかも変数 x_i の変域を離散的集合とした特別の場合を許容するのに役立つ. ただし定義 1.2 の条件 (ii) によって, そうやたらな不連続性は出て来ないようにしてある. この問題点は定義 1.2 において条件 (i) の代りに「 ξ は連続」なる要請を置くことにより解消できよう. ただしそのようにした場合, [3]のわく組が [1, 2] のそれの真の拡張でなくなってしまうことは覚悟しなければならない.

なお許容列において $\xi(\infty)$ の安定性が要請されている, という事実は条件 $\int_0^\infty \alpha_i(t) dt = \infty$ と, ある関連を有する.

その一端はすでに上で見た通りであるが、このことは次のように考えればさらに一般的に裏づけられる。 $z(t)$ を (2.3) の解とするとき、 $z(\infty)$ とは、われわれの体系が最後に落ち込む動作の環であると言える。ただし環とは言っても $z(\infty) = \phi$ なることもあり得る。実際、さきに全空間にわたって $\varphi_i(z) > 0$ となる場合を考えながら、その場合は $z(\infty) = \phi$ となる。また $z(\infty)$ が 1 点 w のみから成るということもある。その場合、 w は体系がなだりつく安定点ということになる。また $z(\infty)$ が 2 個以上の元を含むのであれば、体系はついにはある繰り返し運動の中に落ち込むのである。ただしやかましく言うと、いずれの場合においても、 $z(t)$ は $z(\infty)$ の中へ本当に落ち込むとは限らない。単に $z(\infty)$ に無限に近づいて行くだけかもしれない。

それはともかくとして、 $z(t)$ が $z(\infty)$ の十分近くまで来たときわれわれの体系の各要素が受ける“駆動力”

$\alpha_i(t) \varphi_i(z(t))$ は、 φ_i 、 α_i の連続性からして、 $z(\infty)$ の中での“駆動力”に非常に近いと考えられる。しかるにいま $z(\infty)$ が安定でなかったとすれば、 $z(\infty)$ は空でなく、またある i に対して $z(\infty) \ni x$ の i 成分 x_i は一定 ($=c$) であり、かつ $f_i(x) = x_i + \sigma_i \varepsilon_i$ に対してある d が存在して、 $f_i(x) \geq d > c$ と $f_i(x) \leq d < c$ のどちらか一方がつねに成

り立っている, ということになる. ε_i の取り方から明らかに, そのとき $\beta > 0$ が存在して $x \in Z(\infty)$ に対し $|\varphi_i(x)| \geq \beta$ となる. とすれば $|\int \alpha_i(t) \varphi_i(z(t)) dt| \geq \beta \int \alpha_i(t) dt = \infty$ となり, $z(t)_i \rightarrow c$ となるはずがないことになる. よって $Z(\infty)$ は安定である. すなわち (2.3) の解は (2.4) の許容列となるはずである.

逆に (2.4) の許容列 ξ が与えられたとすると, α_i を (条件 $\int \alpha_i(t) dt = \infty$ をみたさないでよいとした上で) 適当にとり, かつ ξ を連続とすれば, ξ が (2.3) の解となることは上に論じたところから明らかである. しかるにもし $\xi(t)_i \rightarrow c$ とならないのであれば, (つまり $\xi(t)_i$ がいくらでも動くのであれば) $\int \alpha_i(t) |\varphi_i(\xi(t))| dt = \infty$ となる. だが φ_i は有界だから $\int \alpha_i(t) dt = \infty$ となる.

一方 $\xi(t)_i \rightarrow c$ となるのであれば $\varphi_i(\xi(t))$ には時とともにいくらでも小さい値が出て来ることになる. (これまでも特にことわらなかつたが, f_i を作るときは ε_i を十分大きくとる. そうすれば上のことは正しい.) φ_i は連続だからその小さい値の近くでは φ_i の値はやはり小さい. そこで ξ がそのような点の付近に来たときだけ α_i を大きくしてやると, (2.3) の解は ξ から少しだけかわるが, しかしその変り方はごく小さく, しかもそうすることによって $\int \alpha_i(t) dt$

$=\infty$ となるようにできると考えられる。(この話は多とびったり同じ解の存在を保証していない。その意味でこのことを才3の問題点に数えるべきかもしれない。)

以上, §1 の構成を微分方程式 (2.3) に対応させることにより解釈し, またこの対応に存する問題点について論じたが, §1 を特別の場合として含む [3] の構成は元来は Muller らの理論 [1, 2] を形式の面から観察することによって得られたものであり, はじめから (2.3) を考えて導入されたものではない。しかしこのような対応がつくという事実は, Muller らの理論と (2.3) の間に単なる偶然の一致以上の関連があることを暗示しているように思われる。

なお言うまでもなく, 以上の話は「説明」であって, 「証明」と言えるようなものは一切含んでいない。もし (2.3) の解の全体と (2.4) の許答列の全体が同じであることを証明できれば面白いが, 上記二つの問題点がある以上それは原理的に不可能である。許答列の定義を適当に変更することにより, 上記のことを証明可能にすることは, 興味ある将来の問題である。

§3. ユークリッド空間上のC状態

Mullerら[1]は *semimodular* な回路(彼らの意味での)についてC状態なるものを導入し, これが非同期式回路の解析と設計に有効であることを示した. またこの手法を利用した研究が[4, 5, 6]でおこなわれている.

本節の主題は, このC状態の理論と同じようなものをユークリッド空間の中で作れないか, 考えてみることである. ただし本節の話は中間報告で, たとえばC状態の集合の束論的性質を調べることなどは今後の問題として残っている. なおユークリッド空間を考えることは本質的ではない. ここでも注意1.5におけると同様, Mullerのものの理論とユークリッド空間に関する理論の *topological closure* に相当するものを, [3]のわく組の中で与えることができる.

Mullerら[1]のC状態の理論を一言にすれば, 与えられた *semimodular* 回路からある半順序集合を構成し, もとの回路の許容列を, この半順序集合の中に値をもつ単調増大かつある意味で極大な時間関数の, ある定まった写像による像として特徴づけようとするものである. Mullerらの半順序集合は非負整数を成分とする数ベクトルから成り, 順序は成分ごとの大小関係によって導入される. そしてその数ベクトルはいわば回路の各素子に計数器をつけ, 動作開始以来そ

これらの素子は何回動いたかを数えて書き並べたものである、
 ということができる。

ところで、見方を変えるとMullerらのC状態は、許容列
 がある一定時刻まで打ち切ったもののなす集合の、ある同
 値分類による同値類とみなし得ることがわかる。ユークリッ
 ド空間上でC状態を定義するには、この考えをもちいる。

記号 3.1. $a, b, c, d \in E$ に対し、 $\langle a, b, c \rangle$ かつ
 $\langle a, c, d \rangle$ なることを $\langle a, b, c, d \rangle$ であらわす。 $a, b,$
 $c, d \in E^n$ についても同様とする。

定義 3.1. 関数 $\square: E^2 \rightarrow E^n$ が $C = (n, f)$ の上の 準ホ
モトピー (quasi-homotopy) であるとは、任意の区間 $I =$
 $[a, b]$ に対して定数 $\varepsilon = \varepsilon(a, b) > 0$ が、また (一様に)
 $\delta > 0$ が存在して、次の事実が成り立つことである。すな
 わち、任意の $t \in I$, $-\infty < p < \infty$, $0 \leq \delta t \leq \varepsilon$, $0 \leq \Delta t$
 $\leq \frac{\varepsilon}{2}$, $|\Delta p| \leq \delta \cdot \Delta t$ に対し

条件 3.1.1. $\langle \square(t, p), \square(t + \Delta t, p + \Delta t),$
 $\square(t + \delta t - \Delta t, p + \Delta p), \square(t + \delta t, p) \rangle$

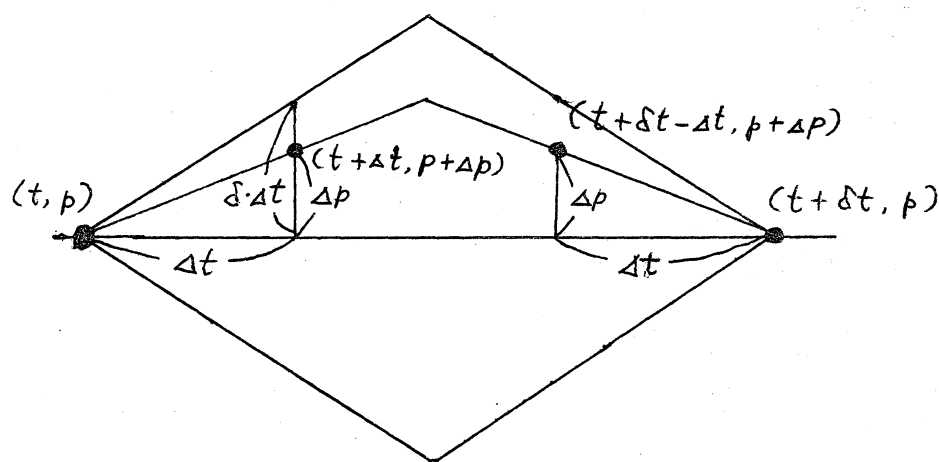
が成り立つ。

また $\square$ が ホモトピー (homotopy) であるとは、上記前提の
 もとに、条件 3.1.1 の (3) か更に

条件 3.1.2. $\square(t, p) \mathcal{R} \square(t + \varepsilon, p)$

が成り立つことを言う。ここでも注意 1.3 におけると同様のことが言える。

注意 3.1. 上記構成は位相幾何学におけるホモトピーの概念をいくぶん連想させるので，上のように名づけた。なお条件 3.1.1 の意味につき下図参照。



記号 3.2. α を関数 $\alpha: [0, l] \rightarrow E^n$ とするとき，関数 $\xi_\alpha: E \rightarrow E^n$ を

$$\xi_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(0) & t < 0 \text{ のとき,} \\ \alpha(t) & 0 \leq t \leq l \text{ のとき,} \\ \alpha(l) & t > l \text{ のとき,} \end{cases}$$

により定義する。また $l_\alpha = l$ と書く。

記号 3.3. $u \in E^n$ とする。 $l \geq 0$ と，ある $\xi \in \mathbb{X}[u]$ に対し

$$\alpha(t) = \xi(t) \quad (0 \leq t \leq l)$$

となるような $\alpha: [0, l] \rightarrow E^n$ の全体を $\Gamma[u]$ であらわす。

$\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ につき, $l_\alpha \leq l_\beta$, かつすべての $t \in [0, l_\alpha]$ に対して $\alpha(t) = \beta(t)$ のとき, $\alpha \leq \beta$ と書く. $\leq$ は順序である.

定義 3.2. $\Gamma[u]$ 上の通りとする. $\Gamma[u]$ の 2 元 α, β に対し, $\alpha \underset{q}{\text{hom}} \beta$ であるとは, 準ホモトピー Ξ と p_0, p_1 が存在して

$$\Xi(t, p_0) = \xi_\alpha(t), \quad \Xi(t, p_1) = \xi_\beta(t) \\ (-\infty < t < \infty)$$

となることである. 特に Ξ をホモトピーであるようにとれるとき, $\alpha \text{ hom } \beta$ であると言う.

命題 3.1. 関係 $\text{hom}, \underset{q}{\text{hom}}$ は $\Gamma[u]$ の上の同値関係である.

命題 3.2. $\alpha \in \Gamma[u]$ と準ホモトピー Ξ につき, ある p_0 に対して $\Xi(t, p_0) = \xi_\alpha(t)$ ($-\infty < t < \infty$) であるならば, $t \geq l_\alpha, |p - p_0| \leq \delta \cdot (t - l_\alpha)$ に対し $\Xi(t, p) = \alpha(l_\alpha)$, また $t \leq 0, |p - p_0| \leq -\delta \cdot t$ に対し $\Xi(t, p) = \alpha(0)$ が成り立つ.

系 3.2.1. $\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ に対し, $\alpha \underset{q}{\text{hom}} \beta$ なら $\alpha(0) = \beta(0)$, かつ $\alpha(l_\alpha) = \beta(l_\beta)$.

定義 3.3. $\xi: E \rightarrow E^n$ が有界作動であるとは, 任意の有界区間 $I = [a, b]$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在し, $t \in I$ に

わたって ξ が区間 $[t, t+\varepsilon]$ で (各 i ごとに) 単調なことである. $\varepsilon = e(a, b)$ は b について単調非増大, a について単調非減少と仮定してよい. 定義 1.2 および注意 1.3 参照. さて有界作動の ξ に対し, 集合 $\text{Span}(\xi, i, t)$ を

$$\bigcup_{0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}} B(\xi(t-\delta)_i, \xi(t+\delta)_i)$$

に等しいものと定義する. ただし $B(a, b)$ は $a \leq b$ なら区間 $[a, b]$ を, $a > b$ なら $[b, a]$ をあらわす. また ε は

$$\varepsilon < e(t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2})$$

となるよう十分小さくとる. (それはつねに可能である. また ε を小さく取りなおすことは定義に影響しない.)

定義 3.4. ξ を上の通りとし, 順序集合 C_i^ξ を

集合: $\{(\alpha, t) \mid -\infty < t < \infty, \alpha \in \text{Span}(\xi, i, t)\}$,

順序: (i) $t_1 < t_2$ なら $(\alpha, t_1) < (\beta, t_2)$,

(ii) $\alpha, \beta \in \text{Span}(\xi, i, t)$, $\alpha \neq \beta$ のとき

$$(\alpha, t) < (\beta, t) \iff \langle \xi(t - \frac{\varepsilon}{2})_i, \alpha, \beta, \xi(t + \frac{\varepsilon}{2})_i \rangle$$

によって定義する. ε は上記の通り.

命題 3.3. C_i^ξ は全順序集合である.

定義 3.5. ξ, η を定義 3.3 の通りとする. $\xi \text{ sim } \eta$ であるとは C_i^ξ と C_i^η の間の関係 $\Gamma_i \subseteq C_i^\xi \times C_i^\eta$ であって次の条件 3.5.1 ~ 3 をみたすものが各 i ごとに存在すること

である.

条件 3.5.1. Γ_i は次の意味で順序を保存する.

$$\begin{aligned} & [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i \text{ \& } [(\alpha_1, t_1), (\beta_1, u_1)] \in \Gamma_i \\ & \text{ \& } (\alpha, t) < (\alpha_1, t_1) \text{ \& } (\beta, u) > (\beta_1, u_1) \\ \Rightarrow & \left[\forall [(\alpha_2, t_2), (\beta_2, u_2)] \in C_i^{\xi} \times C_i^{\eta}, \right. \\ & (\alpha, t) \leq (\alpha_2, t_2) \leq (\alpha_1, t_1) \text{ \& } (\beta, u) \geq (\beta_2, u_2) \geq (\beta_1, u_1) \\ & \left. \Rightarrow [(\alpha_2, t_2), (\beta_2, u_2)] \in \Gamma_i \right]. \end{aligned}$$

条件 3.5.2. Γ_i は次の意味で双方向に網羅的である.

$$\begin{aligned} & \forall (\alpha, t) \in C_i^{\xi}, \exists (\beta, u) \in C_i^{\eta}, [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i \\ & \text{ \& } \forall (\beta, u) \in C_i^{\eta}, \exists (\alpha, t) \in C_i^{\xi}, [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i. \end{aligned}$$

条件 3.5.3. Γ_i は次の意味で値を保存する.

$$\forall [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i, \alpha = \beta.$$

命題 3.4. 関係 sim は同値関係である.

命題 3.5. $\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ に対し, $\alpha \text{ g.hom } \beta$ なら
 $\xi_{\alpha} \text{ sim } \xi_{\beta}$.

定理 2. $\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ に対し, $\alpha \text{ g.hom } \beta$, $\alpha \leq \beta$
 かつ $l_{\alpha} < l_{\beta}$ なら, $l_{\alpha} \leq t \leq l_{\beta}$ に対して $\beta(t) = \alpha(l_{\alpha})$.

系. 関係 g.hom , $\cup$ については hom は, $\Gamma[u]$ の上の関係
 $\leq$ と両立する.

記号3.4. $\Gamma[u]$ の, 関係 hom による同値類の全体を $C[u]$ であらわす. $C[u]$ においても, $\Gamma[u]$ の順序から自然に導かれる順序を考えて, これを $\leq$ であらわす.

文献

1.D.E. Muller and W.S. Bartky, A Theory of Asynchronous Circuits. In Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, Vol.29, Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, pp.204-243, Harvard University Press, 1959.

2.R.E. Miller, Switching Theory, Vol.II, Chapter 10, John Wiley, New York, 1965.

3.I. Kimura, Space-Continuous Time-Semicontinuous Theory of Speed-Independent Asynchronous Circuits. Submitted for publication, preprint obtainable upon request from the author.

4.W.S. Bartky, A Theory of Asynchronous Circuits III, Report No.96, University of Illinois, Digital Computer Laboratory, January 1960.

5.J.H. Shelly, The Decision and Synthesis Problems in Semi-Modular Switching Theory, Report No.88, University of Illinois, Digital Computer Laboratory, May 20, 1959.

6.M. Hattori and H. Noguchi, Synthesis of Asynchronous Circuits, J. Math. Soc. Japan, Vol.18, No.4, pp.405-423, 1966.