

Thining model - A constructive field theory

神戸大理

麦 林 布 道

長 町 章 昭

Thining モデルに associated boson の考えを導入すること
は、既に Klaiber¹⁾ によってなされている。研究会におい
て、この考えをとりこんで構成的場の量子論の観点から
Thining モデルを眺める可能性を指摘したが、そのすぐ後で
Dolovich - Sushko²⁾ の全く同じ構想の論文が出たので、彼等
の結果をとり入れて報告をまとめた。

Thining モデルは 1958 年に Thining³⁾ によって提出され
て以来、2次元ではあるが、解ける相対論的に不変なモデル
としてきわだっただけ位置を占めて来た。Thining モデルに関す
る論文は数えきれないくらい多くあり、大きく分けると、
operator solution に関するものと、Green 関数ないし Wightman
関数に関するものがある。また、そのいわゆる“解”なるもの
の論文の数同様きわめて多様である。Wightman の公理系
をみたす non-trivial な場の量子論の存在の問題になったとき、

Thirring モデルはそのオーギュメントにあげられたのであるが、決定的な結論がえられないまま、 $\lambda(\phi^2)_2$ 理論や Y_2 理論と先を越されてしまった。公理的論的場の量子論の立場からのこのモデルの分析については、Wightman⁴⁾ および Klaiber¹⁾ の講義録を見れば十分であろう。Thirring モデルにおける散乱演算子の存在証明に関する Buehler⁵⁾ の論文もあげておこう。

Thirring モデルの研究でこれまで最も欠如していたのは、Hamiltonian field theory としての数学的な分析である。最近の言葉でいえば、Thirring モデルは構成的場の量子論にまだ十分組み込まれていない。その理由として考えられるのは、一つには $\lambda(\phi^2)_2$ や Y_2 と違って、Thirring モデルはくりこみ可能ではあるが“超くりこみ可能”ではないこと、また、解けるモデルとしての特性を失わないように切断 (cut off) を入れることの難しさである。Thirring モデルを 構成的 場の量子論の一つとしてとらえたとき、operator solution を直接吟味することは、上記のオギュメント理由からしてまず駄目であろう。これに対して、2次元の複素数のフェルミ粒子の特性を利用した associated boson の方法は考えてみる価値がありそうである。かつて Uhlenbrock⁶⁾ が Luttinger モデルについて行ったように、Thirring モデルの Hamiltonian を associated boson の演算子に関する2次形式の形に書くことが出来れば、Bogo-

Liubov 変換による Hamiltonian の対角化が可能になり、この変換を中性スカラーモデルにおける Bogoliubov 変換と対比してあげれば、くりこみ之道もひらけてくるであろう。これが我々のねらいであったが、このねらいの当たっていかんことを Volovich-Sushko によって示されたようである。

ここからは、Bogoliubov 変換あたり迄を述べ、そのあとは、今後の発展が当然予想されるので、それを待つて次回にゆずることにする。

§ 1. Cutoff Hamiltonian

Thining モデルの formal Hamiltonian は

$$(1) \quad H = -i \int_{-\infty}^{\infty} : \psi^*(x) \gamma^5 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) : dx + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} : j^{\mu}(x) j_{\mu}(x) : dx$$

で与えられる。ここ

$$j^{\mu}(x) = : \psi^*(x) \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi(x) : \quad \mu = 0, 1.$$

$$\gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_3.$$

$\psi(x)$ は 2次元時空の質量 0 のスピノール粒子の波動関数である。

発散をおさえるために、系を長さ L の箱の中に閉じこめて周期的境界条件を課す。また、紫外発散をおさえるために、相互作用に形状因子 $f_0(x-y)$ を入れる。最終的には、 L

$\rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$ の極限を考える. $f_\sigma(x-y) \rightarrow \delta(x-y)$.

いま,

$$\Gamma = \left\{ p = \frac{2\pi}{L} n : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\Gamma' = \{ p \in \Gamma : p \neq 0 \}, \quad \Gamma^+ = \{ p \in \Gamma : p > 0 \}$$

と置き, $\Gamma, \Gamma', \Gamma^+$ における和を簡単にそれぞれ.

$$\sum_p = \sum_{p \in \Gamma}, \quad \sum'_p = \sum_{p \in \Gamma'}, \quad \sum_p^+ = \sum_{p \in \Gamma^+}$$

で表わす. 波動関数は.

$$\psi_p(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} \hat{\psi}_p(p)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} [u_p(p) a_p + v_p(p) b_{-p}^*]$$

と展開される. $==$ 是

$$\{ a_p^*, a_q \} = \{ b_p^*, b_q \} = \frac{L}{2\pi} \delta_{p,q}$$

$$\begin{cases} u_1(p) = u_2(-p) = v_1(-p) = v_2(p) = \theta(p), & p \neq 0 \\ u_1(0) = v_2(0) = 1, & v_1(0) = u_2(0) = 0 \end{cases}$$

また, 以下

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

と約束する.

この結果, Hamiltonian (1) は.

$$(2) \quad H(L, \sigma) = H_0(L, \sigma) + H_I(L, \sigma)$$

$$= \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| [a_p^* a_p + b_p^* b_p]$$

$$+ 2g \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} : \psi_1^*(x) \psi_1(x) f_\sigma(x-y) \psi_2^*(y) \psi_2(y) : dx dy$$

と表す。

演算子 $\{a_p^\#\}, \{b_p^\#\}$ ($\#$ は消滅・生成演算子を總称する記号) の作用する Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Asy}(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$$

と書ける。 $n=1$, $D^+ = D^- = l^2(\Gamma)$ であって

$$z = \{z_p\} \in l^2(\Gamma) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \sum_p |z_p|^2 < \infty.$$

また, $\text{Asy}(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$ は n 階の反対称テンソル積を意味する。

§ 2. Associated boson.

2次元時空において質量0のフェルミ演算子2個から, 質量0のボース演算子 (いわゆる associated boson) をつくる表式は, 既に Uhlenbrock⁶⁾ と Klaiber⁷⁾ によって与えられている。(両者の表式は一見異なるが, 互いに同値である

ことを示せる.) $\equiv \equiv$ では Klauder 流の表式を使う.

$$(3) \quad A_p = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\sqrt{|p|}} \left\{ \theta(p) \sum_q : \hat{\psi}_1^*(q) \hat{\psi}_1(q+p) : \right. \\ \left. + \theta(-p) \sum_q : \hat{\psi}_2^*(q) \hat{\psi}_2(q+p) : \right\}, \quad p \in P'$$

$D_0(L) \subset \mathcal{H}_F(L)$ を粒子数有限の部分空間とし.

$$A_p^\dagger = A_p^*|_{D_0(L)}$$

と置く. $\bar{\Phi}, \bar{\Psi} \in D_0(L)$ のとき

$$(4) \quad [A_p, A_q] \bar{\Phi} = [A_p^\dagger, A_q^\dagger] \bar{\Phi} = 0,$$

$$[A_p, A_q^\dagger] \bar{\Phi} = \frac{L}{2\pi} \delta_{p,q} \bar{\Phi},$$

および

$$(A_p \bar{\Phi}, \bar{\Psi}) = (\bar{\Phi}, A_p^\dagger \bar{\Psi})$$

をみるのは容易である. 従って $\{A_p^\dagger\}$ はボースの交換関係, をみたす.

current vector $j^\mu(x, t)$ は通常の場合 $\partial_\mu j^\mu(x, t) = 0$ の他に $\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu} j_\nu(x, t) = 0$ をみたす. 但し, $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$, $\varepsilon^{01} = -1$.

Truncating $\mathcal{T}_\Lambda^{\text{IL}}$ が解ける理由は $\equiv \equiv$ にあるが, このことから

$$j^\mu(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu j(x, t)$$

となるスカラ $j(x, t)$ の存在する $\equiv \equiv$ が期待できる (もちろんこれは当然). 実際, 量子化された場の場合にもこのようにな

$\hat{j}(x, t)$ があって, $\{A_p^\# \}$ を用いて次のように表わせる

$$(5) \quad \hat{j}(x, t) = -i \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p' \frac{1}{\sqrt{2|p|}} [e^{i(p)t - ipx} A_p^+ - e^{-i(p)t + ipx} A_p] \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{L} [\hat{x}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \hat{x}(\Lambda_1 - \Lambda_2)]$$

ここで,

$$(6) \quad \Lambda_p = \frac{2\pi}{L} \sum_q [u_p(q) a_q^* a_q - v_p(-q) b_q^* b_q], \quad p = 1, 2$$

演算子 Λ_1, Λ_2 はそれぞれ非負 (負) の運動量をもつ a 粒子の数から正 (非正) の運動量をもつ b 粒子の数を引いたものを表わし, 他の主要な演算子のすべてと交換する.

$$(7) \quad [\Lambda_1, \Lambda_2] = 0,$$

$$[A_p^\#, \Lambda_p] = [H_0(L, \sigma), \Lambda_p] = [H_2(L, \sigma), \Lambda_p] = 0.$$

従って, Λ_1, Λ_2 の同時固有空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ を

$$\Lambda_p \mathcal{H}(\lambda) = \lambda_p \mathcal{H}(\lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$$

とすると, Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L) = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}(\lambda)$$

と分解される.

Fock 真空を Ω_0 とすると, $D_0(\lambda) = D_0(L) \cap \mathcal{H}(\lambda)$ は

$$\prod_{i=1}^{m^+} a_{p_i^+}^* \prod_{j=1}^{m^-} a_{p_j^-}^* \prod_{r=1}^{n^+} b_{p_r^+}^* \prod_{s=1}^{n^-} b_{p_s^-}^* \Omega_0$$

なる形の基礎ベクトルをもっている。ただし,

$$q_i^+ \geq 0, \quad q_i^- < 0, \quad p_r^+ > 0, \quad p_s^- \leq 0$$

$$m^+ - n^+ = \lambda_1, \quad m^- - n^- = \lambda_2$$

である。 $A_p^\#(\lambda) = A_p^\#|_{D_0(\lambda)}$ とおくとき, $\{A_p^\#(\lambda)\}_{p \in T'}$ は $\mathcal{H}(\lambda)$

で Fock 表現可能である。 $A_p(\lambda) \Omega_0(\lambda) = 0$ で定義される各

部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は Fock の真空 Ω_0 から計算さ

れる: $\Omega_0(\lambda) = U_\lambda \Omega_0$

$$U_\lambda = \left[\delta_{\lambda,0} + \theta(\lambda_1-1) \prod_{r=0}^{\lambda_1-1} a_{-\frac{2\pi}{L}r}^* + (1-\theta(\lambda_1)) \prod_{v=1}^{|\lambda_1|} b_{\frac{2\pi}{L}v}^* \right]$$

$$\cdot \left[\delta_{\lambda_2,0} + \theta(\lambda_2-1) \prod_{r=1}^{\lambda_2} a_{-\frac{2\pi}{L}r}^* + (1-\theta(\lambda_2)) \prod_{v=1}^{|\lambda_2|-1} b_{-\frac{2\pi}{L}v}^* \right]$$

§ 3. Koenig の identity

相互作用 Hamiltonian $H_I(L, \sigma)$ は $\{A_p^\#\}$ と Λ_p で書くと

が出来る。

$$(8) \quad H_I(L, \sigma) = 2g \frac{2\pi}{L} \sum_p^+ p \chi_\sigma(p) [A_p^+ A_{-p}^+ + A_p A_{-p}] + 2g \frac{2\pi}{L} \Lambda_1 \chi_{\sigma(0)} \Lambda_2$$

と表す。 $\sigma = \pm$

$$\chi_\sigma(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ipx} f_\sigma(x) dx.$$

(8) の各項の定義されるため, $\sum_p^+ |p \chi_\sigma(p)|^2 < \infty$ と仮定す。

3.

$H_0(L, \sigma)$ と $A_p^\#$ との交換関係を計算すると, $\Phi \in D_0(L)$ に対して

$$[H_0(L, \sigma), A_p^\dagger] \Phi = i p |A_p^\dagger \Phi$$

と $\Phi = 0$ となる。従って, $H_0(\lambda) = H_0(L, \sigma)|_{D_0(L)}$ に対して

$$[(H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| A_p^\dagger(\lambda) A_p(\lambda)), A_q^\#(\lambda)] = 0$$

が成り立つ。 $\{A_p^\#(\lambda)\}$ の既約性から

$$(9) \quad H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| A_p^\dagger(\lambda) A_p(\lambda) = E_0(\lambda) I(\lambda).$$

ここで, $I(\lambda)$ は $\mathcal{H}(\lambda)$ の恒等演算子である。この結果は, 各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ でフェルミ粒子の自由 Hamiltonian $H_0(\lambda)$ はボース粒子の free Hamiltonian と等しいことを示している。これを Kronig の恒等式という。 $E_0(\lambda)$ は (9) 式を $\Omega_0(\lambda)$ に作用させることによって定まる。

$$E_0(\lambda) = \frac{\pi}{L} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2]$$

このようにして, total Hamiltonian $H(L, \sigma)$ は各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ (sector と呼ぶ) における Hamiltonian (sector Hamiltonian と呼ぶ) の直和と分解されることをわかった。

$$H(L, \sigma) = \bigoplus_{\lambda} H(\lambda),$$

$$(10) \quad H(\lambda) = \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| A_p^+(\lambda) A_p(\lambda)$$

$$+ 2g \frac{2\pi}{L} \sum_p^+ p \chi_0(p) [A_p^+(\lambda) A_{-p}^+(\lambda) + A_p(\lambda) A_{-p}(\lambda)] + E_g(\lambda) 1(\lambda)$$

$= = \kappa$

$$E_g(\lambda) = \frac{\pi}{L} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2] + \frac{\pi}{L} 4g \chi_0(0) \lambda_1 \lambda_2.$$

§ 4. Bogoliubov 変換.

$H(\lambda)$ は $A_p^+(\lambda)$ に関する quadratic hamiltonian である. その
本値的自己共役性は, $\chi_0(p)$ に対する条件 $\sum_p^+ |p \chi_0(p)|^2 < \infty$ によ
って保証されている⁷⁾. さらに $\chi_0(-p) = \chi_0(p)$ を仮定し

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \tanh^{-1}(-2\chi_0(p))$$

と置く, Bogoliubov 変換

$$A_p(\lambda) \rightarrow \tilde{A}_p(\lambda) = \cosh \varphi_p A_p(\lambda) + \sinh \varphi_p A_{-p}^+(\lambda)$$

$$A_p^+(\lambda) \rightarrow \tilde{A}_p^+(\lambda) = \sinh \varphi_p A_{-p}(\lambda) + \cosh \varphi_p A_p^+(\lambda)$$

によって $H(\lambda)$ は対角化される. $\chi_0(p)$ の条件より,

$\sum_p |p \chi_0(p)|^2 < \infty$ であるから, この変換はユニタリ変換であっ

て,

$$A_p(\lambda) = U(\lambda) \tilde{A}_p(\lambda) U^{-1}(\lambda)$$

とある U = タリ演算子 $U(\lambda)$ が存在する。実際

$$(11) \quad U(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{2\pi}{L} \sum_p \varphi_p [A_p^+(\lambda) A_p^+(\lambda) - A_p(\lambda) A_p(\lambda)] \right\}$$

とある。これは対応して $H(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は

$$\Omega_0(\lambda) \rightarrow \bar{\Omega}_0(\lambda) = U^{-1}(\lambda) \Omega_0(\lambda)$$

と変換される。 $H(\lambda)$ の対角化は

$$(12) \quad U(\lambda) H(\lambda) U^{-1}(\lambda) = \sum_p \omega^\sigma(p) A_p^+(\lambda) A_p(\lambda) + \dots$$

とある。右辺において、 λ に依存する C 級項が省略されている。また

$$(13) \quad \omega^\sigma(p) = |p| \operatorname{sech} 2\varphi_p = |p| \sqrt{1 - 4g^2 \chi_0(p)^2}$$

がエネルギー・スペクトルを与える。空間の切断をとり除いた

極限 ($\sigma \rightarrow \infty$ $f_\sigma(x) \rightarrow \delta(x)$) においては $\chi_0(p) = \frac{1}{2\pi}$ であるから、

すなわち $\omega^\sigma(p) \rightarrow |p| \sqrt{1 - g^2/\pi^2}$ とある。この分散式は相対

論的かつ不変な理論を暗示するからには合点が要い。 $\omega(p) = |p|$

とあるべきである。これを是正するため、Volovich-Sushko

は $A_p^+(\lambda)$ について 2 次の λ 項を Idamiltonian につけ

加えている。

Idamiltonian の対角化は、 $A_p^+(\lambda)$ を A_p^+ で置きかえること

によって、全 Fock 空間に拡張できることを付言しておく。

以上述べたことから判るように, associated boson を導入してみると, Thirring モデルの構造は中性スカラール・モデルの構造と著しく似通っている。即ち, $\mathcal{H}(\lambda)$ は中性スカラール・モデルにおける核子数一定の sector に対応し, associated boson は, 勿論, 中性スカラール・モデルにおける中間子に対応している。また, フェルミ粒子の演算子は, 中性スカラール・モデルにおける核子演算子の如く, 相異なる sectors をつないでいる。さらに, 上記の Bogoliubov 変換はまさに dressing transformation である。従って, Volovich-Sushko の二のちの議論はおもその見当がつく。ただ, Thirring モデルでは $\psi_p^\#(p)$ は $A_p^\#$ と交換しないので, 中性スカラール・モデルの場合と違って trivial な理論にはならない。

文 献

- 1) B. Klaiber, Boulder Lectures in Theoretical Physics
Vol. XA (1967), 141-176
- 2) I. V. Volovich and V. N. Sushko, Theor. Math. Phys. 9
(1971), 211-231 (in Russian)
- 3) W. Thirring, Ann. Phys. 3 (1958), 91-112.

- 4) A. S. Wightman, 1964 Cargèse Lectures in Theoretical Physics, pp. 171-291.
 - 5) F. A. Berezin, Mat. Sb. 76 (1968), 3-25
 - 6) D. A. Ullendrock, Commun. Math. Phys. 4 (1967), 64-76
- 尚 4)~6) に関連して次の解説がある。
- 麦林布道, 日本物理学会誌 24 (1969), 203-211.
- 7) F. A. Berezin, The Method of Second Quantization
(Academic Press, New York - London, 1966)