

葉層構造を保つ微分同相群について

京都産業大 理 福井 和彦

§ 0. はじめに.

$\mathcal{F}^k$ を C^k 級開多様体 M 上の C^k 級、余次元 k 葉層構造とする。

定義 1. 微分同相 $f: M \rightarrow M$ が 葉層構造を保つ (葉を保つ)

微分同相 とは、 M の各点 x に対して、 $f(L_x) = L_{f(x)}$ ($f(L_x) \subset L_{f(x)}$)

となることである。ここで L_x は x を通る葉を示す。

$\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F})$ を $(M, \mathcal{F})$ の葉層構造を保つ C^r 級微分同相の全体とする ($r \geq 1$)。明らかに、 $\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F}) \subset \text{Diff}^r(M)$ が成り立つ。従って、 $\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F})$ 上の位相を $\text{Diff}^r(M)$ 上の C^r -位相より導入する。 $\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F})$ が位相群である事は良く知られている。

我々は、この位相群に関して若干の考察を、特にそれが、完全群か否か、即ち、その交換子部分群と一致するかどうかを頭において行う。

§ 1 定義と定理

定義 2 $\mathcal{F}^k$ が n 次元多様体 M^n 上の バンドル葉層構造 であるとは、 M^n を全空間、ある k 次元多様体を底空間とする C^∞ -ファイバーバンドルであって、各ファイバー（これは $(n-k)$ 次元多様体）を葉とする葉層構造のことである。

定理 1 $\mathcal{F}^k$ が M^n 上のバンドル葉層構造であるとする。

$m > r \geq n+2$ なら、 $\text{FDiff}_0^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ は完全群である。ここで $\text{FDiff}_0^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ は、 $\text{FDiff}^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ の恒等写像を含む連結成分である。

定義 3 余次元 1 の葉層構造をもつ compact な多様体 $(W, \mathcal{F}^1)$ ($\partial W \neq \emptyset$) が 一般 Reeb 型成分 であるとは、次の 1), 2), 3) を満たすことである：

- 1) $\text{Int} W$ の中の各葉は、non-compact かつ proper,
- 2) $\text{Int} W$ の中の各葉のホロノミー群は自明,
- 3) $\mathcal{F}^1$ の compact な葉のホロノミー群の元を局所微分同相

$h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(0)=0$ とすると、(a) h は恒等写像に 0 で C^∞ -tangent, (b) 0 のある近傍で $h'' \geq 0$ 又は $h'' \leq 0$ をみたす。

例 S^3 上の Reeb 葉層構造は一般 Reeb 型成分を含む。又 Lawson [4], 田村 [9], 水谷-田村 [7] の作った葉層構造も、一般 Reeb 型成分を含む。

定理 2. $(M, \mathcal{F}^1)$ が一般 R_{ab} 型成分を含むとする。このとき、 $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ から $S^1 (= SO(2))$ 上への連続な準同型写像が存在する ($r \geq 1$)。

系 3. 上の $(M, \mathcal{F}^1)$ に対して、 $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は完全群でない。

定義 4. 余次元 1 の葉層構造をもつ compact な多様体 $(W, \mathcal{F}^1)$ ($\partial W \neq \emptyset$) が D-成分 であるとは、次の 1), 2), 3) を満たすことである：

- 1) $\text{Int } W$ の中の各葉は局所稠密、
- 2) $\text{Int } W$ の中の各葉のホロノミー群は自明、そして
- 3) $\mathcal{F}^1$ の compact な葉のホロノミー群の元を局所微分同相

$h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(0) = 0$ とすると、 h は 0 で恒等写像と C^∞ -tangent である。

注意. 1') $\text{Int } W$ の中に局所稠密な葉が存在する。3') $(W, \mathcal{F}^1)$ が $W \cup \partial W \times [0, 1]$ 上に $\partial W \times [0, 1]$ 内の葉を、 $\partial W \times \{t\}$, $0 \leq t \leq 1$, の連結成分と定義することにより、 C^∞ 葉層構造として拡張出来る。このとき、条件 1), 2) は条件 1'), 2) と同値、条件 3) は条件 3') に同値である。

定理 4. $(M, \mathcal{F}^1)$ が D-成分を含むとする。このとき、 $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ から S^1 又は $\mathbb{R}^1$ 上への連続な準同型写像が存在する ($r \geq 2$)。

系 5. 上の $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は完全群でない。

§2 定理2の証明

(W, π^1) を一般 Reeb 型成分とする。このとき $\text{Int } W$ は S^1 上の C^∞ -ファイバーバンドルになることがわかる [2]。 $p: \text{Int } W \rightarrow S^1$ を射影とする。このとき、 $\text{FDiff}_0^r(W, \pi^1)$ の元 f に対して、次の可換図が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \text{Int } W & \xrightarrow{f} & \text{Int } W \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \end{array},$$

ここで $\bar{f}: S^1 \rightarrow S^1$ は $\text{Diff}_0^r(S^1)$ の元である。写像 $g:$

$$\text{FDiff}_0^r(W, \pi^1) \rightarrow \text{Diff}_0^r(S^1) \text{ を } g(f) = \bar{f} \text{ (} f \in \text{FDiff}_0^r(W, \pi^1) \text{)}$$

で定義する。明らかに、 g は連続な準同型である。この時、次の補題が成立する。

補題1 $\text{Im } g = \text{SO}(2)$, ここで $\text{SO}(2)$ は S^1 の回転群である。

証明は、[1] の補題 1.9 を見よ。

定理2の証明 (M, π^1) が一般 Reeb 型成分を含むとする。

このとき、 $\text{res}: \text{FDiff}_0^r(M, \pi^1) \rightarrow \text{FDiff}_0^r(W, \pi^1|_W)$ を W に制限する写像とする。明らかに、 res は連続な準同型写像である。

写像 g と res の合成写像を π とする、即ち、 $\pi = g \circ \text{res}: \text{FDiff}_0^r(M, \pi^1) \rightarrow S^1$ 。

明らかに、 π は連続な準同型だから、定理2を証明するためには、 π が上への写像である事を示せばよい。

W 上の $\mathcal{F}|_W$ に transverse なベクトル場で $\text{Int } W$ の各葉と唯一
 点だけで交わる閉軌道をもつものを X とする。(実は $(W, \mathcal{F})$
 が一般 Reeb 型成分なら、そのようなベクトル場がとれて、ファイバー
 写像 p を $p(x) = C \cap L_x$ で定義する事により、 $p: \text{Int } W \rightarrow C$
 $= S^1$ は、ファイバー・バンドルであることを証明するのである [2]。こ
 こで C は上の閉軌道である。) dt を $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の自然な 1-
 form, $\omega = p^*dt$ を $\text{Int } W$ 上の 1-form とする。その時、 $\text{Int } W$
 上の正值関数 g で $\omega(gX) \equiv 1$ を満たすものが存在する。ここ
 で ϕ_t をベクトル場 gX に同伴な flow とする。 ϕ_t は $\text{Int } W$
 上葉層構造を保つ微分同相を与える。更に $\partial W \ni z$ に対して、
 $\phi_t(z) = z$ とおく事により、 ϕ_t は W 上葉層構造を保つ C^∞ 級
 flow でかつ、 ∂W で恒等写像に C^∞ -tangent であることがわか
 る ([1] の注意 1.5 を見よ)。さて、 $S^1 (= SO(2))$ の元 α に対し
 て、 $(M, \mathcal{F})$ の葉層構造を保つ微分同相 f として、

$$f|_{(W, \mathcal{F}|_W)} = \phi_\alpha, \quad f|_{W \text{ の外 }} = \text{恒等写像}$$

で定義すると、この f は $\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F})$ の元であり、 $\pi(f) = \bar{f}$
 $= \alpha$ を満たす。証明終り。

§ 3. 定理 3 の証明

$\text{LDiff}^r(M, \mathcal{F})$ を葉を保つ C^r 級微分同相群とする。これは、
 $\text{FDiff}^r(M, \mathcal{F})$ の正規部分群である。 $\text{FDiff}^r(W, \partial W, \mathcal{F})$,

$LDiff^r(W, \partial W, \mathcal{F})$ も夫々 $FDiff^r(W, \mathcal{F})$, $LDiff^r(W, \mathcal{F})$ の部分群で ∂W で恒等写像と C^r -tangent なものであるとする。

補題 2. $(W, \mathcal{F})$ を D -成分とする。このとき、自然な包含写像 $\iota: FDiff_o^r(W, \partial W, \mathcal{F}) / LDiff_o^r(W, \partial W, \mathcal{F}) \rightarrow FDiff_o^r(W, \mathcal{F}) / LDiff_o^r(W, \mathcal{F})$ は、位相群として同型である。

証明 単射は明らかだから、全射であることを示す。それには、 $FDiff_o^r(W, \mathcal{F})$ の任意の元 f に対して、 $LDiff_o^r(W, \mathcal{F})$ の元を作用させて、 $FDiff_o^r(W, \partial W, \mathcal{F})$ の元を作ればよい。

X を $\mathcal{F}$ に transverse な W のベクトル場とする。このとき、 ∂W の近傍で、 f は X の各軌道を保つとしてよい ([1] の主張 1.10 を見よ)。従って $f|_{\partial W} = \text{恒等写像}$ が成立している。更にこの f は、 ∂W で恒等写像と C^∞ -tangent である。何故なら $T([0, \infty))$ を X の 1 つの軌道とする (0 は ∂W の点 z に対応しているとする)。 0 の近傍 $[0, \varepsilon)$ で、次の不等式が成立する:

ある自然数 n_0 に対し、 $x > f(x) \geq \pm^{n_0}(x)$ または、 $x < f(x) \leq \pm^{n_0}(x)$ ($x \in [0, \varepsilon)$) ここで $\pm$ は z の $\pm 12 / \pi$ の代表元である。

定義 4 の条件 3) より $\pm^{n_0}(\pm^{n_0})$ は 0 で恒等写像に C^∞ -tangent である。従って f も C^∞ -tangent である。 証明終り。

補題 3 $(W, \mathcal{F}')$ を D -成分とする。このとき $\mathcal{F}'$ の任意の葉 L に対して、 $L = W$ が成り立つ。

証明 $\text{Int } W$ において Reeb [8] の A. II, 11 を応用すると、 L は $\text{Int } W$ の中で、致るところ稠密である。従って $\text{Int } W$ の各葉 L に対して $L \cap \partial W$ を示せばよい。これに対しては今西-ハ木 [2, 補題 2.4] で示されている。 証明終り。

補題 4. $(W, \mathcal{F}^1)$ を D-成分とする。このとき $\text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1)$ の元であるが $\text{LDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1)$ の元でないものが存在する。

証明 Sacksteder の定理 [3] より、 W 上に $\mathcal{F}^1$ を保つ topological flow p が存在する ($\partial W \ni x$ に対して $p(x, t) = x$)。各 t_0 に対して $p(\cdot, t_0)$ は $\text{Int } W$ で C^∞ 級である。よって ∂W で p が C^∞ 級であることを示せばよい。しかし、 $p(\cdot, 1)$ は (∂W の近傍で) X の各軌道上でホロノミー群の代表元である。従って、 $p(\cdot, 1)$ は ∂W で C^∞ 級である。 $p(p(x, t), s) = p(x, t+s) = p(p(x, s), t)$ であるから、任意の t ($0 \leq t \leq 1$) に対して、 $p(\cdot, t)$ は ∂W で C^∞ 級である。 証明終り。

Leslie の定理 [5] $\mathcal{F}^0$ を M^n 上の余次元 g C^r 級葉層構造とする ($r \geq 2$)。局所稠密な葉 $L_1, \dots, L_k$ で $\overline{L_1 \cup \dots \cup L_k} = M$ なるものが存在するとする。このとき $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^0) / \text{LDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^0)$ は $g \cdot k$ 次元以下のリー群である。

この定理を使って次の命題を証明する事が出来る。

命題 1 $(W, \mathcal{F}^1)$ を D-成分とする。このとき、 $\text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1) / \text{LDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1)$ は 1 次元リー群と同型である。

証明 $M = W \cup W$ とする。Leslie の定理と補題 3 によって $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1) / \text{LDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は 1.2 次元以下のリー群である。

次の可換図を考える。簡単のために $\text{FDiff}_0^r(\cdot, \mathcal{F}^1)$, $\text{LDiff}_0^r(\cdot, \mathcal{F}^1)$ のかわりに $D_{\mathcal{F}}(\cdot)$, $D_{\mathcal{F}^1}(\cdot)$ とかく。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W, \partial W) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W, \partial W) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W, \partial W) / D_{\mathcal{F}^1}(W, \partial W) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(M) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(M) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(M) / D_{\mathcal{F}^1}(M) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W) & \rightarrow & D_{\mathcal{F}}(W) / D_{\mathcal{F}^1}(W) \rightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \textcircled{1} \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

縦、横の列は全て完全列である。更に各写像は連続である。

①は、補題 2 から出る。従って $D_{\mathcal{F}}(W, \partial W) / D_{\mathcal{F}^1}(W, \partial W)$ は

$D_{\mathcal{F}}(M) / D_{\mathcal{F}^1}(M)$ の閉部分群である。更に補題 4 より

$D_{\mathcal{F}}(W, \partial W) / D_{\mathcal{F}^1}(W, \partial W)$ は 1 点ではない。よって $D_{\mathcal{F}}(W) / D_{\mathcal{F}^1}(W)$

は 1 次元リー群である。

証明終り。

定理 3 の証明 $(M, \mathcal{F}^1)$ は、D-成分 $(W, \mathcal{F}^1|_W)$ を含むとする。

W への制限写像を $\text{res} : \text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1) \rightarrow \text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1|_W)$ とす

る。次の合成写像 $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1) \xrightarrow{\text{res}} \text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1|_W) \rightarrow \text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1|_W) / \text{LDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1|_W)$ が上への連続準同型写像である事を示す。

補題 2 より, $\text{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}'|_W) / \text{LDiff}_0^r(W, \mathcal{F}'|_W)$ の各元は $\text{FDiff}_0^r(W, \partial W, \mathcal{F}^1)$ の元 φ で代表される。従って $\text{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ の元として、 W 上で φ 、 W^c 上で恒等写像とすればよい。命題 1 より定理が得られる。
証明終り。

§ 4. 定理 1 の証明の概略

補題 5 $\mathcal{F}^k$ を M^n 上、余次元 k のバンドル葉層構造とする。このとき $\text{FDiff}_0^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ の任意の元 f は、 $f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_\ell$ とかける。ここで各 f_i ($1 \leq i \leq \ell$) は、 M の近傍 $U_{k_i} \times V_{j_i}$ 上で次のようにかける：

$$\begin{aligned} f_i : U_{k_i} \times_{\downarrow} V_{j_i} &\longrightarrow U_{k_i} \times_{\downarrow} V_{j_i} && \text{で} \\ (x, y) &\longmapsto (f_i^1(x), f_i^2(x, y)) \end{aligned}$$

- (1) U_{k_i} は $\mathbb{R}^k$ に、 V_{j_i} は $\mathbb{R}^{n-k}$ に同相 ($1 \leq i \leq \ell$),
- (2) $\bigcup_{i=1}^{\ell} (U_{k_i} \times V_{j_i}) = M$, $\ell \geq 2$.
- (3) $U_{k_i}^c \ni x$ に対し $f_i^1(x) = x$, $(U_{k_i} \times V_{j_i})^c \ni (x, y)$ に対して、 $f_i^2(x, y) = y$ をみたす。

従って、次のような $\mathbb{R}^n$ の C^r 級微分同相が交換子でかけることを証明すればよいことになる。

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} && C^r \text{ 級微分同相で} \\ \downarrow &&& \downarrow \\ (x, y) &\longmapsto (f_1(x), f_2(x, y)) \end{aligned}$$

- (1) $\mathbb{R}^k$ の compact 集合の外で $f_1 = \text{恒等写像}$,

$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ の compact 集合の外の元 (x, y) に対して $f_2(x, y) = y$

(2) f は恒等写像に C^r -位相の意味で近い。

上のような f の集合を $\mathcal{L}^r$ とかく。もちろん $\mathcal{L}^r$ に C^r -位相を導入しておく。

定理 6 $\infty > r \geq n+2$ なら、 $\mathcal{L}^r$ は完全群である。

証明は、Mather [6] のアナロジーであるから省略する。

REFERENCES

- [1] K. Fukui, On the homotopy type of some subgroups of $\text{Diff}(M^3)$, 数理解析研究所講究録 257, 1-31.
- [2] H. Imanishi and K. Yagi, On Reeb components, J. Math. Kyoto Univ.,
- [3] H. Imanishi, Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy, (preprint)
- [4] H. B. Lawson, Codimension-one foliations of spheres, Ann. of Math., 94(1971), 494-503.
- [5] J. Leslie, A remark on the group of automorphisms of a foliation having a dense leaf, J. Diff. Geom., 7(1972), 597-601.
- [6] J. Mather, Commutators of diffeomorphisms, Comment. Math. Helv., 49(1974), 512-528.
- [7] T. Mizutani and I. Tamura, Foliations of even dimensional

manifolds, *Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology*, Tokyo, 1973, 189-194.

[8] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Sci. Ind. Herman*, Paris, 1183 (1952), 83-154.

[9] I. Tamura, Specially spinnable manifolds, *Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology*, Tokyo, 1973, 181-187.