

Banach 束の作用素に関連した不等式

北大 応電研 安藤 毅

1. まえがき. E を完備な (複素係数) Banach 束とする.
 E 上の (0) -有界な線形作用素 (i.e. (0) -有界部分集合を (0) -有界部分集合へ移す) S に対してその modulus $|S|$ が定義される,

$$|S|x = \bigvee_{|y| \leq x} |Sy| \quad (0 \leq x \in E).$$

例えば, $E = \mathbb{C}^n$ で $S = (\alpha_{ij})$ と行列表示がなされているときは $|S| = (|\alpha_{ij}|)$ に外ならない.

さて, T が正 (positive) 作用素で, $|S| > r(T) \equiv$ " T の Spectre 半径" のときは $(S - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^{-n-1} T^n$ より $S(S - T)^{-1}$ および $T(S - T)^{-1}$ は共に (0) -有界である.

われわれは不等式

$$|T(S - T)^{-1}| \leq |S(S - T)^{-1}|$$

を S の適当な範囲で, また $T \in E$ にある条件を課することによって $|S| > r(T)$ なる全ての S に証明したい.

一般に恒等式

$$1 + T(S-T)^{-1} = S(S-T)^{-1}$$

が成立しているので、上の不等式は何も奇異なものではないが、決して自明とは思われな。証明が困難なのは Banach 空間での有用な手段である duality が使用できないためである。実際 (0)-有界な S に対し $|S^*| \neq |S|^*$ は必ずしも一致しない。(cf. [2] p. 296).

2. 射影. E 上の (0)-有界作用素の全体 $\mathcal{L}^r(E)$ は普通の順序と norm $\|S\|_r := \| |S| \|$ に関して完備(複素) Banach 束となる. $1 \in \mathcal{L}^r(E)$ であるから、1に生成される band (i.e. (0)-直和因子)を $\mathcal{J}$ とする. (E 上の)全ての射影 (band projection) は $\mathcal{J}$ に属することは明らかであるが更に次が成り立つ.

[補題 1] (Nakano [1]). $\mathcal{J}$ は (E 上の)射影の1次結合の全体の norm closure である. $\mathcal{J}$ 上では2つの norm $\|\cdot\| \neq \|\cdot\|_r$ は一致し

$$\|S\|_r = \|S\| = \inf \{ \lambda > 0 : |S| \leq \lambda \} \quad (S \in \mathcal{J}).$$

$\mathcal{L}^r(E)$ から band $\mathcal{J}$ への射影を $P_{\mathcal{J}}$ とかく.

[定理 1] T が正作用素なら

$$|T(z-T)^{-1}| \leq |z(z-T)^{-1}| \quad \forall |z| > 3 \cdot r(T).$$

証明. 射影の一般的性質として P_j および $1-P_j$ は

$$|P_j z| = P_j |z|, \quad |(1-P_j)z| = (1-P_j)|z|$$

をもたすから, $|z| > 3 \cdot r(T)$ のとき次を示せばよい

$$|P_j [T(z-T)^{-1}]| \leq |P_j [z(z-T)^{-1}]|, \quad |(1-P_j)[T(z-T)^{-1}]| \leq |(1-P_j)[z(z-T)^{-1}]|$$

とこで $P_j 1 = 1$ と $z(z-T)^{-1} = T(z-T)^{-1} + 1$ より

上のオ2の(不)等式は常に成立する. またオ1の不等式が成

立するための充分条件は $|P_j [T(z-T)^{-1}]| \leq 1/2$ である.

補題1よりこの条件は $\|P_j [T(z-T)^{-1}]\|_r \leq 1/2$ と同値

である. もし $|z| > 3\|T\|$ なら, T の正作用素なること

$$\text{から} \quad \|P_j [T(z-T)^{-1}]\|_r \leq \|T(z-T)^{-1}\|_r$$

$$\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{-n} T^n \right\|_r \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{-n} \|T\|^n \leq 1/2$$

で上記の条件が満たされる.

$|z| > 3 \cdot r(T)$ のときは $|z| > 3(r(T) + \varepsilon)$ なる $\varepsilon > 0$

をとり, E に新しい norm

$$\|x\|' := \sum_{n=0}^{\infty} (r(T) + \varepsilon)^{-n} \|T^n x\|$$

を導入すると, 容易に $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ は同値なことがわか

る. この新しい norm に関し

$$3\|T\|' \leq 3(r(T) + \varepsilon) < |z|$$

となるから上の方法を使えばよい.(終).

3. Reduction. E を discrete (i.e. atomic) 部分 E_d と continuous (i.e. non-atomic) 部分 E_c に分ける, $E = E_d \oplus E_c$. それぞれへの射影を P_d, P_c とかく. これを使って $L^n(E)$ の射影, 例えば, P_{dc} を $P_{dc} S := P_d S P_c$ で定義する. 同様に P_{cc}, P_{cd}, P_{dd} が定義される.

[補題 2] 正作用素 T に関する次の条件は互に同値である.

$$(a) \quad |T(\xi - T)^{-1}| \leq |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T).$$

$$(b) \quad P_{cc} P_J |T(\xi - T)^{-1}| \leq P_{cc} P_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T).$$

証明. (a) $\Rightarrow$ (b) は射影の性質から明.

(b) $\Rightarrow$ (a). 定理 1 の証明にあるように, (b) の下に,

$$P_J |T(\xi - T)^{-1}| \leq P_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T)$$

を示せばよい. まず P_{cd}, P_{dc} の定義と補題 1 から

$$P_J = P_{cc} P_J + P_{dd} P_J$$

となるから, (b) の下では, 更に reduce された

$$P_{dd} P_J |T(\xi - T)^{-1}| \leq P_{dd} P_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T)$$

を証明すればよいことになる.

この最後の不等式が成り立たないとしたら. すると

$\exists |\xi_0| > r(T), \exists$ atomic 射影 P で

$$P |T(\xi_0 - T)^{-1}| P = P \cdot P_{dd} P_J |T(\xi_0 - T)^{-1}| P \not\leq$$

$$\neq P \cdot P_{dd} P_T |z_0(z_0 - T)^{-1}| \cdot P = P |z_0(z_0 - T)^{-1}| P$$

となる. P は *atomic* より z の $S \in L^n(E)$ に対して PSP は P の係数倍となる. そこで函数 $\varphi(z)$ を $\forall |z| = |z_0|$ 上 z

$$\varphi(z)P = P |z(z - T)^{-1}| P - P |T(z - T)^{-1}| P$$

で定義すると, 上記の z_0 , P に関する条件は $\varphi(z_0) < 0$ のこととなる. 一方 T が正作用素なることから

$$0 \leq T(|z_0| - T)^{-1} \leq 1 + T(|z_0| - T)^{-1} = |z_0|(|z_0| - T)^{-1}$$

となり $\varphi(|z_0|) \geq 0$ である. φ は z の連続函数であるから $\exists |z| = |z_0|$ で $\varphi(z) = 0$ のものがとれる. したがってこの z に関して $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$e^{i\theta} P T (z - T)^{-1} P = P [z(z - T)^{-1}] P.$$

となる. 作用素 $S := e^{i\theta} P T + (1 - P) T$ を考えると

$$(z - S)(z - T)^{-1} P =$$

$$= P(z - S)(z - T)^{-1} P + (1 - P)(z - S)(z - T)^{-1} P$$

$$= P(z - e^{i\theta} T)(z - T)^{-1} P + (1 - P)(z - T)(z - T)^{-1} P = 0$$

となり, z は S の固有値となる, したがって

$$|z_0| = |z| \leq r(S).$$

一方 $|S| \leq T$ より $|S|^n \leq T^n$ 故に $r(S) \leq r(T)$ となり $r(T) < |z_0|$ から矛盾が出る. (終).

[定理 2] E が discrete で T が 正作用素 なら

$$|T(\xi - T)^{-1}| \leq |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T).$$

証明. $P_{cc} = 0$ となり補題 2 の (b) が成立する.

[定理 3] T が compact な正作用素 なら

$$|T(\xi - T)^{-1}| \leq |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad \forall |\xi| > r(T).$$

証明. 作用素

$$A := P_{cc} T |(\xi - T)^{-1}| = P_c T |(\xi - T)^{-1}| P_c$$

を考えると, T の compact 性より A も compact な正作用素となる. $P_j P_{cc} = P_{cc} P_j$ より $P_{cj} A = 0$ なら補題 2 (b) が成立.

$P_j A \neq 0$ と仮定すると, 補題 1 から射影 $0 \neq P \leq P_c$ と $\varepsilon > 0$ があり $P_j A \geq \varepsilon P$ となる. Banach 束 $F := P(E)$ で正作用素 $B := \varepsilon^{-1} P A P$ は compact で $B \geq 1$ となる. F は atom をもたないから射影の列 P_n で $P_n \neq 0$, $P_n P_m = 0$ ($n \neq m$) のものがある. $0 \leq x_n \in P_n(F)$, $\|x_n\| = 1$ のものをとると B の compact 性より, 必要なら部分列をとって, $Bx_n \rightarrow^s y$ (強収束) となる. 明かに $P_n y \rightarrow 0$ (弱収束) が成り立つから, $B P_n y \rightarrow 0$ (強収束) となる. 更に $B \geq 1$ と $x_n \geq 0$ から $x_n = P_n x_n \leq P_n B x_n$ となる. したがって, $0 \leq P_n y \leq B P_n y$ を使って,

$$1 = \|x_n\| \leq \|P_n B x_n\| \leq \|P_n y\| + \|P_n(Bx_n - y)\| \\ \leq \|B P_n y\| + \|B x_n - y\| \rightarrow 0$$

なる矛盾がでる。(終)

4. あとがき. Banach 束に関連した問題の多くがそうであるように, 今とり上げている不等式も, E が (AM) 空間 または (AL)-空間のときに証明できれば一般に成立することを示そう.

(AM)-空間への reduction. 任意に $0 \leq x_0 \in E$ および $|s| > r(T) + \varepsilon$ を fix して, 不等式

$$|T(s - T)^{-1}| x_0 \leq |s(s - T)^{-1}| x_0$$

を示したいわけである. このため $\rho := r(T) + \varepsilon$ として

$u := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} T^n x_0$ を考える. u の生成する ideal

$$E_u := \{x \in E : |x| \leq \lambda u\} \text{ は norm } \|x\|_u := \inf\{\lambda : |x| \leq \lambda u\}$$

で (AM)-空間になり, $0 \leq x_0 \leq u$ より $x \in E_u$ である.

明かに $Tu \leq \rho u$ より T は E_u を不変にする. T の E_u

への restriction を T_u とかくと $r(T_u) < |s|$ であり

$$|T_u(s - T_u)^{-1}| x_0 = |T(s - T)^{-1}| x_0, \quad |s(s - T_u)^{-1}| x_0 = |s(s - T)^{-1}| x_0$$

となるから (AM)-空間 E_u 上の作用素 T_u に問題が reduce される.

(AL)-空間への reduction. E が (0)-連続な線形汎関数
を充分多く許容する場合だけを考えよう. このときは不等式
 $x \leq y$ は, $f(x) \leq f(y) \quad \forall (0)\text{-連続 } f$ で特徴づけられる.
したがって, 任意に $0 \leq x_0 \in E$, $0 \leq f \in E^*$ ((0)-連続) と
 $|\lambda| > r(T) + \varepsilon \equiv \delta$ を fix して

$$f(|T(\lambda - T)^{-1}|x_0) \leq f(|\lambda(\lambda - T)^{-1}|x_0)$$

を示したいわけである. それで $f_0 := \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-n} T^{*n} f \geq 0$
 E に semi-norm $\|x\|_{f_0} := f_0(|x|)$ を入ると E は
pre-(AL)-空間となり, T_{f_0} はそこで連続であり $r(T_{f_0}) < \delta$
となり (AL)-空間の場合に reduce される.

一般に E が (AL)-空間のときは全ての連続作用素 S
は (0)-有界になり $\|S\|_r = \|S\|$ である (cf. [2] p.232).
したがって考えている不等式

$$|T(\lambda - T)^{-1}| \leq |\lambda(\lambda - T)^{-1}| \quad \forall |\lambda| > r(T)$$

が成立するのは norm の不等式

$$\|T(\lambda - T)^{-1}\| \leq \|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \quad \forall |\lambda| > r(T)$$

が成り立つ.

文 南大

- [1] H. Nakano, Modern spectral theory, Maruzen, Tokyo, 1950
- [2] H. H. Schaefer, Banach lattices and positive operators, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1974