

von Neumann algebras の continuous fields について

東北大 教養 武元英夫

M を finite von Neumann algebra, Z を M の center, Ω を Z の spectrum space とする. M から Z への $\sharp$ -operation $\sharp$ に対して, M のすべての maximal ideals は Ω の元に対応して完全に決定されることは良く知られている. すなわち, $\omega \in \Omega$ に対して,

$$m_\omega = \{a \in M : (a^*a)^\sharp(\omega) = 0\}$$

は M での maximal ideal であって, M での maximal ideal は上の形で完全に決定される. さらに, maximal ideal m_ω に対して, quotient algebra M/m_ω が finite factor になることは Sakai [1] によって示されている. maximal ideal による quotient algebra が von Neumann algebra になることを示した Sakai の結果の拡張として次の Takesaki [3] の定理がある.

定理 1. M を finite von Neumann algebra, $\mathcal{Z}$ を M の center, A を $\mathcal{Z}$ の von Neumann algebra とする. A の spectrum space を Ω とおく. ε を次の性質を満たす M から A 上への α -weakly continuous な linear mapping とする.

$$(i) \quad \varepsilon(x^*x) = \varepsilon(xx^*) \geq 0 \text{ for } \forall x \in M, = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(ii) \quad \varepsilon(ax) = a\varepsilon(x) \text{ for } \forall a \in A, \forall x \in M,$$

$$(iii) \quad \varepsilon(1) = 1$$

各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$m_\omega = \{x \in M : \varepsilon(x^*x)(\omega) = 0\}$$

とすると, m_ω は M 上の closed two-sided ideal で quotient algebra M/m_ω は finite von Neumann algebra となる. さらに, M から M/m_ω への canonical homomorphism を π_ω としたとき, A を含む任意の M の von Neumann subalgebra N に対して $\pi_\omega(N)$ は M/m_ω の von Neumann subalgebra となる.

議論を進める前に, $\mathcal{Z}$ が α -finite のときは上のような ε が存在することをお示しておく. この ε が本講演では重要な役割を演じている. M が finite von Neumann algebra であるから定理 1 の (i), (ii), (iii) の性質を満たす M から $\mathcal{Z}$ への α -operation が存在している. 従って, $\mathcal{Z}$ から A への α -weakly continuous, faithful な norm one の projection の存在について示せば

よ。 $\mathcal{Z}$ が α -finite であるので, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{Z}$ 上の faithful normal state とする。しかも, $\mathcal{G}$ による M の cyclic representation を考えることによって, M は Hilbert space $\mathcal{H}$ 上に act していてしかも $\mathcal{G}(x) = (x\xi, \xi)$ for $\forall x \in \mathcal{Z}$ とする cyclic vector ξ をもっているとして仮定して十分である。 $\mathcal{H}$ から $[A\xi]$ への projection を e とすると, A が abelian von Neumann algebra であるから, e は A' での abelian projection となっている。しかも, $A' \cap \mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \supset A$ より, e の A' での central support は 1 である。したがって, $eA'e$ と A は $*$ -isomorphic である。

$$\theta : eA'e \rightarrow A, * \text{-isomorphic}, \theta(xe) = x \text{ for } \forall x \in A$$

そこで, $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}(x) = \theta(exe)$ for $\forall x \in \mathcal{Z}$ とおくと, $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ はもとめるものとなっている。

定理 1 に対応して, von Neumann algebras の continuous fields を使った考え方が Takemoto and Tomiyama [2] によって与えられた。すなわち, せうらは次の様な考え方で進められた。

$M, \mathcal{Z}, A, \Omega, \mathcal{E}$ は全て定理 1 と同じものとする。

$\mathcal{L}(M, A)$ を M から A への bounded linear mapping 全体からは Banach space とする。上に与えられた $\mathcal{E}$ は $\mathcal{L}(M, A)$

の元となっている。特に, bounded A -module homomorphism となっている。そこで, $a \in M$ に対して $\varepsilon_a(x) \equiv \varepsilon(ax) = \varepsilon(xa)$ によって ε_a を定義すると, ε_a は M から A への α -weakly continuous A -module homomorphism となっている。 $\{\varepsilon_a : a \in M\}$ の $\mathcal{L}(M, A)$ での closure を V とすると, 各 $\Phi \in V$ は M から A への α -weakly continuous な A -module homomorphism である。しかも, 各 $a \in M$ に対して, $\mathcal{L}(M, A)$ での linear mapping L_a, R_a を

$$(L_a \Phi)(x) \equiv \Phi(ax), \quad (R_a \Phi)(x) = \Phi(xa)$$

によって定めると,

$$L_a V \subset V, \quad R_a V \subset V$$

となっている。ここで, 各 $\omega \in \Omega$ に対して,

$$m_\omega = \{a \in M : \varepsilon(a^*a)(\omega) = 0\}$$

とおくと, m_ω は M での closed ideal となり,

$$m_\omega = \{a \in M : \Phi(a)(\omega) = 0 \text{ for } \forall \Phi \in V\}$$

となっている。したがって,

$$\pi_\omega : M \ni a \rightarrow a(\omega) \in M/m_\omega$$

とあると, $\Phi \in V$ に対して, $\Phi(m_\omega) \subset m_\omega \cap A$, $a \in M$ をとってくると, $|\Phi(a)(\omega)| \leq \|\Phi\| \cdot \|a(\omega)\|$ となっている。このことから, $\Phi \in V$ に対して

$$\Phi(\omega)(a(\omega)) \equiv \Phi(a)(\omega)$$

によって $\Phi(\omega)$ を定めると, $\Phi(\omega)$ は $M(\omega) = M/m_\omega$ 上の bounded linear functional となっている。

$$V(\omega) \equiv \{\Phi(\omega) : \Phi \in V\}$$

は $M(\omega)^*$ での invariant subspace である。さらに, 次の性質が示される。

(1) 各 $\Phi \in V$ に対して, 関数 $\omega \rightarrow \|\Phi(\omega)\|$ は Ω 上の連続関数である。

実際, 各 $\Phi \in V$ に対して M の元 u (unitary element) が存在して, すべての $\omega \in \Omega$ に対して, $\|\Phi(\omega)\| = \Phi(u)(\omega)$ となっている。

(2) 各 $\omega \in \Omega$ に対して, $V(\omega)$ は $M(\omega)^*$ での closed subspace となっている。

実際, $\mathcal{J}$ は V から $V(\omega)$ への canonical mapping とすると, $\mathcal{J}$ から induce される $V/\ker \mathcal{J}$ から $V(\omega)$ への mapping $\hat{\mathcal{J}}$ が isometry となっている。

これから, $V(\omega)$ は $M(\omega)^*$ での closed invariant subspace となる。したがって, $V(\omega)^* = M(\omega)^{**}/V(\omega)^\circ$ は $V(\omega)$ を predual space としても von Neumann algebra となる。とくに, $M(\omega)^{**}/V(\omega)^\circ$ が $M(\omega)$ と一致することが示される。したがって, $M(\omega)$ は $V(\omega)$ を predual space として von Neumann algebra

となる。

以上のことから, von Neumann algebras と predual spaces からなる field $\{M(\omega), V(\omega) : \omega \in \Omega\}$ が von Neumann algebra M と σ -weakly continuous A -module homomorphisms の set V の pair $\{M, V\}$ から構成される。しかも, 上に示されている様に, $a \in M, \varphi \in V$ に対して, $\omega \rightarrow \varphi(\omega)(a(\omega))$ は Ω 上の連続関数となっている。このことから,

$$W(\Omega, M(\omega), V(\omega))$$

$$\equiv \{a = \{a(\omega)\} : a(\omega) \in M(\omega), \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \varphi(\omega)(a(\omega)) \text{ は連続}, \varphi \in V, \omega \rightarrow \|a(\omega)\| \text{ は有界}\}$$

とおくと, $W(\Omega, M(\omega), V(\omega))$ は M と等距離写像で同型となる。

次に今までの field を subalgebras への restriction について考えよう。

N を M の C^* -subalgebra, $N(\omega) \equiv \pi_\omega(N)$ とおく。 $\varphi \in V$ に対して $\varphi(N, \varphi(\omega)|_{N(\omega)})$ をそれぞれ $\varphi, \varphi(\omega)$ の $N, N(\omega)$ への restriction を表わす。

定理1より, N を A を含む M の von Neumann subalgebra とする。そのとき, $N(\omega)$ は $M(\omega)$ の von Neumann subalgebra となっている。これから, 任意の $\varphi \in V$ に対して,

$$\omega \longrightarrow \|\varphi(\omega)|_{N(\omega)}\|$$

は Ω 上の連続関数となる。

これは, M の von Neumann subalgebras に対する性質であるが, これを C^* -subalgebra について考えると次の結果が得られる。

定理 2. N は A を含む M の C^* -subalgebra である。そのとき, $\omega_0 \in \Omega$ に対して, 次は同値である。

$$(1) \quad \widetilde{N(\omega_0)} = \tilde{N}(\omega_0)$$

(2) 各 $\Phi \in V$ に対して, 関数 $\omega \rightarrow \|\Phi(\omega) | N(\omega)\|$ は点 ω_0 で連続である。

ここで $\tilde{N}$ は N の α -weak closure を表わす。

定理 1, 定理 2 の性質を C^* -subalgebra で考えた場合にはどうなるかということも, 具体的なもので考えてみよう。

M を α -finite, finite von Neumann algebra, τ を M 上の faithful normal trace とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\equiv \{a = (a_n) : M \text{ の元からなる bounded sequence} \} \\ &= \ell^\infty(\mathbb{N}, M) \end{aligned}$$

とすると, $\mathcal{O}$ は finite von Neumann algebra であって, $\mathcal{O}$ の center は $\mathcal{A} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ を含んでいる。 τ を用いて, $\mathcal{O}$ から $\mathcal{A}$ への mapping ε を次のように定義する。

$$\varepsilon(a) \equiv (\tau(a_n)) \quad \text{for } \forall a = (a_n) \in \mathcal{O}$$

そのとき, ε に対して定理 1 での (i), (ii), (iii) が満たれる。N の Stone - Čech compactification を βN としておく。 $n \in N$ に対して, $m_n = \{a = (a_n) : \tau(a_n^* a_n) = 0\} = \{a \in \mathcal{O} : \varepsilon(a)(n) = 0\}$ は $\mathcal{O}$ での closed ideal であり $\mathcal{O}/m_n$ は von Neumann algebra である。特に, $\mathcal{O}/m_n \cong M$ となっている。 $\omega \in \beta N \setminus N$ に対しては, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\omega)$ を ω の all neighborhoods からなる filter とする。それに対して,

$$m_\omega = \{a = (a_n) \in \mathcal{O} : \lim_{\mathcal{U}} \tau(a_n^* a_n) = 0\}$$

と置く。すると, 定理 1 の結果より, $\mathcal{O}/m_\omega$ は finite von Neumann algebra となる。そこで, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ での $\mathcal{A}$ を含む C^* -subalgebra とする。そのとき, 定理 2 と $\{n\}$ が孤立集合であることから, $\mathcal{B}(n) = \widehat{\mathcal{B}(n)}$ は成立する。しかし, $\mathcal{B}(n) = \widehat{\mathcal{B}(n)}$ はかならずしも成立しない。それは, 後で述べる系からも簡単にわかる。しかし, $\omega \in \beta N \setminus N$ に対しては, この性質が成立することは次の定理で示される。

定理 3. M を α -finite, finite von Neumann algebra とする。 τ を M 上の faithful normal trace とする。 $\mathcal{O} = \ell^\infty(N, M)$, $\mathcal{A} = \ell^\infty(N, \mathbb{C})$ とおき, 各 $\omega \in \beta N \setminus N$ に対して ω のすべての近傍からなる filter を $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\omega)$ と置く。その

とき,

$$m_\omega = \{a = (a_n) \in \mathcal{O} : \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(a_n^* a_n) = 0\}$$

に対して, $\mathcal{O}/m_\omega$ は finite von Neumann algebra となる。 $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}/m_\omega$ への canonical homomorphism を π_ω とおく。

$\mathcal{A}$ を含む $\mathcal{O}$ の C^* -subalgebra $\mathcal{B}$ に対して, $(\mathcal{B})_n = \{a_n : a = (a_n) \in \mathcal{B}\}$ とおくと $(\mathcal{B})_n$ は M の C^* -algebra であるが, 今, $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n) = \{a = (a_n) \in \mathcal{O} : a_n \in (\mathcal{B})_n \text{ for } \forall n\}$ のとき, $\pi_\omega(\mathcal{B})$ は $\mathcal{O}/m_\omega$ の von Neumann subalgebra となる。

定理 3 で $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ を含む C^* -subalgebra としたときは $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ となるとは限らない。しかし, 各 n に対して, M での C^* -subalgebra $\mathcal{B}_n$ with the identity を与えたとき, $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{B}_n)$ に対して, $(\mathcal{B})_n = \mathcal{B}_n$ であって $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ が成立している。 $\mathcal{B}$ が von Neumann subalgebra のときは, $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ がいつも成立している。

定理 3 の証明. $\mathcal{B}$ の σ -weak closure を $\widehat{\mathcal{B}}$ とおくと定理 2 と $\{n\}$ が $\beta\mathbb{N}$ での孤立集合であることから, $(\widehat{\mathcal{B}})_n = \widehat{(\mathcal{B})_n}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立している。しかも, $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ であるから, $\widehat{\mathcal{B}} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \widehat{(\mathcal{B})_n})$ が成立する。

したがって, Kaplansky の density theorem によって, 任意の $a = (a_n) \in \tilde{\mathcal{B}}$ に対して次の性質を満たす sequence $b = (b_n)$ が存在する。

$$(i) \quad b_n \in (\mathcal{B})_n \quad \text{for } \forall n \quad (ii) \quad \tau((a_n - b_n)^*(a_n - b_n)) < \frac{1}{n}$$

$$(iii) \quad \|b_n\| \leq \|a_n\| \quad \text{for } \forall n$$

そのとき, $a = (a_n)$ は bounded sequence であるから $b = (b_n)$ も bounded sequence である。しかも, (i) と $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ より $b = (b_n) \in \mathcal{B}$ となっており, (iii) から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau((a_n - b_n)^*(a_n - b_n)) = 0$$

であるから $\pi_\omega(a) = \pi_\omega(b)$ となる。

ゆえに, $\pi_\omega(\tilde{\mathcal{B}}) = \pi_\omega(\mathcal{B})$ であって, 定理1から $\pi_\omega(\tilde{\mathcal{B}})$ は $\sigma/\mathcal{M}_\omega$ での von Neumann subalgebra であるから, $\pi_\omega(\mathcal{B})$ が $\sigma/\mathcal{M}_\omega$ での von Neumann subalgebra となる。

系. A は Hilbert space H 上に act して $\|\cdot\|$ は C^* -algebra with the identity である。 A の weak closure $\tilde{A} = M$ が σ -finite, finite von Neumann algebra になるとする。そのとき, M 上の faithful normal trace を τ とおいて, 定理3と同様に,

$$\mathcal{M}_n = \{a = (a_n) \in \mathcal{O} : \tau(a_n^* a_n) = 0\},$$

$$\mathcal{M}_\omega = \{a = (a_n) \in \mathcal{O} : \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(a_n^* a_n) = 0\}$$

を定める。ただし, $\mathcal{O} = \ell^\infty(\mathbb{N}, A)$ とする。そのとき, 各

n に対して, $\sigma/m_n \cong A$, $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ に対しては σ/m_ω は von Neumann algebra と取る。

[1] S. Sakai; Yale University, Lecture Note, 1962.

[2] H. Takemoto and J. Tomiyama; Tôhoku Math. Journ., 25 (1973), 273-289.

[3] M. Takesaki; Pacific Journ. Math., 36(1971), 827-831.