

C^* 代数の接合積の双対性と Alesen 不変量 $P(\mathcal{A})$
について

京大 理 岸本晶彦

都立大理 高井博司

§1. 序論

Ⅲ型因子環の構造理論は、最近、Connes と Takesaki を中心にその全容を明らかにしつつあるが、その中で決定的な役割を果たしているのが、Connes による不変量 $S(\mathcal{M})$ と、Takesaki による W^* 代数の接合積の双対定理である。その結果、Ⅲ型理論は、Ⅱ型の理論と力学系の研究に移行され得る：とが示された。(cf: [3], [15]) 一方、 C^* 代数に関して、Takesaki は、非Ⅰ型 C^* 代数の典型と云える UHF-代数を或る種の可換 compact 群によって C^* 接合積を作るとⅠ型 C^* 代数になる事を示した。([17]) この結果と W^* 代数の双対定理に刺激されて、Takai は可換群による C^* 代数の接合積の双対性を論じたが、([13]) Nakagami により、非可換群による W^* 代数の接合積の双対性が示されると、([9]) Imai と共同で非可換群のそれに拡張された。([7]) 他方、Connes 不変量 $S(\mathcal{M})$ は、同じく Connes による $P(\mathcal{M})$ に $\{0\}$ を加えたものになっているが、

話が C^* 代数になると射影による定義は一般的に意味を持たなくなる。そこで、Olesen は、射影の代りに、遺伝的な C^* 代数を用いて Connes 不変量 $P(\alpha)$ の C^* -代数的解釈を行なった。([10]) 更に、Olesen, Pedersen と Skjerve は、単純環 $\mathcal{O}$ と有限巡回群 $\mathbb{Z}/p$ について、 C^* 力学系 $(\mathcal{O}, \mathbb{Z}/p, \alpha)$ を考えた時、 $\mathcal{O}$ の α による不動点のなす C^* 代数 $\mathcal{O}^\alpha$ が素である為の必要十分条件を $P(\alpha) = Sp(\alpha)$ でとらえた。又この時、 $\mathcal{O}^\alpha$ が単純であることも示した。([11]) 可換な W^* 力学系 $(\mathcal{M}, G, \alpha)$ に対して、Connes と Takesaki は、 $P(\alpha)$ を W^* -接合積 $G \otimes \mathcal{M}$ 上の α の双対作用 $\hat{\alpha}$ で特徴付けた。([4]) 更にこの非可換化を Nakagami が示している。([9])

我々はこの講演に於いて、単純環 $\mathcal{O}$ と、可換 discrete 群 G について、 C^* 力学系 $(\mathcal{O}, G, \alpha)$ に対して、Olesen 不変量 $P(\alpha)$ は $\mathcal{O}$ の Multiplier 代数 $M(\mathcal{O})$ の、 α の $M(\mathcal{O})$ への拡張作用 $\bar{\alpha}$ による C^* 接合積 $C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})$ 上への $\bar{\alpha}$ の双対作用 $(\bar{\alpha})^\wedge$ を $C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})$ の中心代数 $\mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})}$ に制限した時の kernel 群になっていることを示す。このことは、Connes-Takesaki の結果の C^* 代数的解釈を与えている。更に、Olesen, Pedersen, Skjerve の結果を、可換 compact な C^* 力学系 $(\mathcal{O}, G, \alpha)$ に対して拡張する。又一般に、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ は $\mathcal{O}^\alpha$ の単純性と同値にならないことを示す。最後に、 C^* 接合積の双対性を用いて、 C^*

接合積 $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$ が素である為の必要十分条件は $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ であることを示す。よって特に、CAR-代数 $\mathcal{A}(G)$ 上への *gauge* 作用 α に関して、 $\Gamma(\alpha) = \mathbb{Z}$ となるので、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は原始的となり、 $\Gamma(\alpha) = \ker \hat{\alpha} |_{\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)}} = \mathbb{Z}$ を得る。

§2. 準備.

$(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* -力学系とする。(cf: [14]) $\mathcal{A}$ に値をとる G 上の Bochner 可積分関数全体に、

$$(2.1) \quad \begin{cases} (x\gamma)(g) = \int_G x(h) \alpha_g[\gamma(h^{-1}g)] dh \\ x^*(g) = \delta(g)^{-1} \alpha_g[x(g^{-1})]^* \\ \|x\|_1 = \int_G \|x(g)\| dg \end{cases}$$

なる Banach $*$ -代数の構造を入れたものを $L^1_\alpha(G; \mathcal{A})$ と書く。その展開環を $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$ と書き、 $\mathcal{A}$ の α による C^* -接合積 と云う。

$\text{Cov rep}(\mathcal{A}, G)$ を $\mathcal{A}$ の共変表現全体とし、 $\text{Rep } \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の非退化表現全体を表わすものとする。 $S \in \text{Rep } \mathcal{A}$ に対して、 $\text{Ind } S$ で

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\bar{S}(a)\gamma)(g) = S \circ \alpha_g^{-1}(a) \gamma(g) \\ (\lambda(h)\gamma)(g) = \gamma(h^{-1}g) \end{cases}$$

なる $(\bar{S}, \lambda) \in \text{Cov rep}(\mathcal{A}, G)$ に対応する $C^*(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ の表現とする。

ただし γ は S の表現空間 $\mathcal{H}_S$ に値をとる G 上の二乗可積分関数全体 $L^2(G; \mathcal{H}_S)$ を動くものとする。そして、 $L^1_\alpha(G; \mathcal{A})$ を

$$\|x\|_\gamma = \sup \{ \|\text{Ind } S(x)\| : S \in \text{Rep } \mathcal{A} \}$$

なる C^* -norm で完備したものを $C^*_*(\mathcal{A}; \alpha)$ と書き、 $\mathcal{A}$ の α によ

る縮約された C^* 接合積と呼ぶ。位相群 G が *amenable* であるとき、 $C^*(\mathcal{A}; \alpha) = C_r^*(\mathcal{A}; \alpha)$ となる。 ([13])

今から G を *locally compact* な可換群とする。 $\mathcal{A}$ の部分 C^* -代数 $\mathcal{B}$ が 道徳的 であるとは、 $\mathcal{B}$ の正の部分 $\mathcal{B}_+$ が $\mathcal{A}_+$ の中で *face* になることである。そこで、 $P(\alpha) = \bigcap_{\theta} Sp(\alpha^\theta)$ とおく。ただし $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の $\{0\}$ でない α -不変な道徳的 C^* -部分代数である。 ([10]) その時、 $P(\alpha)$ は G の双対群 $\hat{G}$ で、閉部分群になる。 G は可換であるから、

$$(2.3) \quad \hat{\alpha}_p(x)(\gamma) = \overline{\langle \gamma, p \rangle} x(\gamma) \quad (x \in L_\alpha(G; \mathcal{A}), p \in \hat{G})$$

なる $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$ 上の作用 $\hat{\alpha}$ が $\hat{G}$ から定まる。そして C^* -力学系 $(C^*(\mathcal{A}; \alpha), \hat{G}, \hat{\alpha})$ から作られる $\mathcal{A}$ の二重接合積 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})$ は $\mathcal{A}$ と $L^2(G)$ 上の完全連続作用素の作る C^* -代数 $C(L^2(G))$ との C^* -tensor 積 $\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G))$ と同型であることが分かり、更に $\hat{\alpha}$ の双対作用 $\hat{\alpha}$ は、 α と $Ad(\lambda)$ との対称 ^(tensor) 作用 $\alpha \hat{\otimes} Ad(\lambda)$ と同値になることが得られる。 ([13])

最後に、 W^* -代数に於ける因子代数の役割を果たす C^* -代数の性質として、次の3つの種類の C^* -代数が考えられる。一つは自明でない閉 *ideal* を持たない C^* -代数で、単純 C^* -代数と呼ばれる。その時には、忠実な既約表現をもつが、この性質を持つ C^* -代数を 原始的 な C^* -代数であると言う。 $\mathcal{A}$ が原始的である時には、 $x\mathcal{A}y = (0)$ ならば $x=0$ か $y=0$ であることは容易に分

かるが、この性質を持つ C^* 代数を、素な C^* 代数であると言う。 $\mathcal{O}$ が可分な時は、素ならば原始的であることが分かり両性質は同じである。 ([5])

§3. 離散可換 C^* 力学系に対する $P(\alpha)$ について

C^* 力学系 $(\mathcal{O}, G, \alpha)$ について、今 G を離散可換群と仮定すると、 $C_r^*(\mathcal{O}; \alpha)$ の任意の要素 x に対して、

$$(3.1) \quad (\text{Ind } \pi)(x)_{g,h} = \pi \circ \alpha_g^{-1} [x(g h^{-1})], \quad \pi \in \text{Rep } \mathcal{O}$$

なる $\mathcal{O}$ の要素の族 $(x(g))_{g \in G}$ が一意に存在する。ただし $(\text{Ind } \pi)(x)_{g,h}$ は、 $(\text{Ind } \pi)(x)$ の $\ell^2(G; \mathcal{O}_\pi)$ 上の (g,h) -番目の行列因子である。この時、 $x \sim (x(g))_{g \in G}$ と書くことにする。 $\mathcal{O}$ の multiplier 代数 $M(\mathcal{O})$ 上の α の拡張作用 $\overline{\alpha}$ を考えた時、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$ が作れて、 G が可換であるから、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha}) = C_r^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$ となる。 ([13])

(2.3) と (3.1) より、

$$(\overline{\alpha})_p^\wedge(x)(g) = \overline{\langle g, p \rangle} x(g), \quad x \sim (x(g))_{g \in G}, x \in C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$$

が成立する。そして、 $\mathcal{O}$ を単純と仮定すると、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$ の中心代数 $\mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})}$ の任意の要素 x に対して次の補助定理が成り立つ。

補助定理 3.1. $x \in \mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})}$ で $x \sim (x(g))_{g \in G}$ とする。

$x(g) \neq 0$ ならば、 $g \in P(\alpha)^\perp$ である。

上の結果と、Olesen の定理を使うと、 W^* 力学系の Connes-Takesaki の結果の C^* 力学系解釈を与えることができる。

定理 3.2. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* -カ学系とし、 $\mathcal{A}$ を単純、 G は離散可換群とする。 $\mathcal{A}$ の Multiplier 代数を $M(\mathcal{A})$ とし、その上の α の拡張作用を $\bar{\alpha}$ とする。 $C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})$ の中心代数を $Z_{C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})}$ とした時、

$$P(\alpha) = \ker(\bar{\alpha})^\wedge \big|_{Z_{C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})}}$$

が成立する。

§4. compact 可換 C^* -カ学系 $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ における $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ について

今 G を compact 可換群と仮定すると、 $P(\alpha)$ について次の使い易い補助定理を得る。

補助定理 4.1. $P(\alpha) = \bigcap_x Sp(\alpha \overline{x \alpha x})$ ただし $x \neq 0$, $x \in \mathcal{A}^\alpha$ である。

この結果を用いると、 $\mathcal{A}$ が単純である仮定なしに、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ である為の十分条件を与えることができる。

命題 4.2. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を compact 可換な C^* -カ学系とし、 $\mathcal{A}$ は単位元を持つとする。もし $\mathcal{A}$ の部分 C^* -代数 $\mathcal{B}$ で単純なものとし、 C^* -カ学系 $(\mathcal{A}, H, \beta)$ で、
 (i) $\mathcal{A}^\alpha \subset \mathcal{B}$, (ii) $\alpha_g \circ \beta_h = \beta_h \circ \alpha_g$ ($g \in G, h \in H$)
 (iii) $\mathcal{B}$ は β -central なる条件を満たすものが存在すれば、

$$Sp(\alpha) = P(\alpha)$$

が成立する。

次の節で、上の命題の仮定を満たす例を調べる。

さて次に、有限巡回群 $\mathbb{Z}_p$ を土台にした C^* -力学系 $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}_p, \alpha)$ に対する *Olesen-Pedersen-Størmer* の結果を compact 可換な C^* -力学系 $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ に拡張する。しかし、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ は一般には、 $\mathcal{A}^\alpha$ の単純性には同値にならないことが次節で示される。

定理 4.3. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* -力学系とし、今 $\mathcal{A}$ を素、 G を可換 compact 群 と仮定する。そのとき、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ である為の必要十分条件は $\mathcal{A}^\alpha$ が素であることである。

§5. CAR-代数 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 上の gauge 作用 α に対する $P(\alpha)$ について

この節では、Fermion 代数の名で呼ばれる CAR-代数 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 上の gauge 作用 α について、その $P(\alpha)$ と $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{H}); \alpha)$ を調べてみる。

可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の CAR-代数 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ とは、

$$(5.1) \quad \begin{cases} [a(f), a(g)]_+ = a(f)a(g) + a(g)a(f) = 0 \\ [a(f), a(g)^*]_+ = \langle f | g \rangle 1 \end{cases} \quad (f, g \in \mathcal{H})$$

を満足する $\mathcal{H}$ から他の Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の有界作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ への線形写像 $f \mapsto a(f)$ の像 $a(f)$ 全体と単位作用素から生成される C^* -代数を云う。 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ が $(2^\infty)_{\text{odd}}$ -型の UHF-代数になる事はよく知られている。今群 G の unitary 表現 U で表現空間を $\mathcal{H}$ とすると、 $\alpha_g(a(f)) = a(U_g f)$ ($g \in G, f \in \mathcal{H}$) なる条件を

満たす $\alpha(\varphi)$ 上の G の作用 α が決まる。特に、 G を一次元 torus T^1 とし、 $U_t = e^{it} 1_\varphi$ としたとき、対応する作用 α を $\alpha(\varphi)$ 上への T^1 の gauge 作用と呼ぶ。この作用 α は $\alpha(\varphi)$ 上強連続であることは (5.1) を使って容易に分かる。(cf: [2]) よって、 $(\alpha(\varphi), T^1, \alpha)$ は C^* -力学系をなすが、我々は、この力学系が命題 4.2. の仮定を満たすことを示す。

$\alpha^n \rightarrow 0$ (w) ($n \rightarrow \infty$) なる φ 上の unitary 作用素 u をとると、 $\beta_1(a(f)) = a(uf)$ ($f \in \varphi$) なる $\alpha(\varphi)$ の自己同型写像 β_1 が定まる。 $\beta_n = (\beta_1)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおくと、 $(\alpha(\varphi), \mathbb{Z}, \beta)$ は、 $\alpha_t \circ \beta_n = \beta_n \circ \alpha_t$ ($t \in T^1, n \in \mathbb{Z}$) なる C^* -力学系となる。 $\gamma(a(f)) = -a(f)$ なる $\alpha(\varphi)$ の自己同型写像 γ をとり、 $\alpha(\varphi)$ の γ による不動点全体のなす C^* -代数 $\alpha(\varphi)^\gamma$ を $\mathcal{B}$ とおく。そのとき、 $\mathcal{B}$ は $\alpha(\varphi)$ に同型となるので UHF-代数になり単純である。([12]) 更に $\mathcal{B}$ は β -central になる。([6]) $\alpha \in \mathcal{B}$ は容易に分かるので命題 4.2. より、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ となる。 $\alpha_t(a(f)) = e^{it} a(f)$ ($f \in \varphi, t \in T^1$) より、 $1 \in Sp(\alpha)$ となる。 $P(\alpha)$ は群をなすので $P(\alpha) = \mathbb{Z}$ を得る。よって、

命題 5.1. CAR-代数 $\alpha(\varphi)$ 上への一次元 torus の gauge 作用 α に対して、

$$P(\alpha) = \mathbb{Z}$$

となる。

又、 $(\mathcal{A}(\mathcal{G}), T^1, \alpha)$ は $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ であるが、 $\mathcal{A}^\alpha$ は単純ではない。実際、

$$m\mathcal{I}_n = \overline{\bigcup_{k=n+m}^{\infty} \bigoplus_{j=n}^{k-m} M_{*C_j}} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots)$$

は $\mathcal{A}^\alpha$ の自明でない *ideal* である。ただし $*C_j = k! / j!(k-j)!$ で M_{*C_j} は I_{*C_j} -型の因子代数をあらわす。([2]) 一方、 $\mathcal{A}$ は素であり、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ より、定理 4.3. によって、 $\mathcal{A}^\alpha$ は素である。

系 5.2. $\mathcal{A}$ は単純で $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ 、かつ $\mathcal{A}^\alpha$ は単純でない、可換 compact C^* -カ学系 $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ が存在する。

今から、 $P(\alpha)$ と $\ker \hat{\alpha}|_{Z_{C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)}}$ との関係を調べる。その為に、 $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)$ の構造を解析する必要がある。

$(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を ~~(可換)~~ C^* -カ学系とし、 G を局所 compact 可換群とする。そのとき、 C^* -カ学系 $(C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha}), G, \hat{\alpha})$ は $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)), G, \alpha \hat{\otimes} Ad(\lambda))$ に同値である。([13]) よって、 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})^{\hat{\alpha}}$ は $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)))^{\alpha \hat{\otimes} Ad(\lambda)}$ に同型である。今 G を compact と仮定すると、 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})^{\hat{\alpha}}$ は $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$ に同型である。よって次の命題を得る。

命題 5.3. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* -カ学系とし、 G を compact 可換群とする。 $C(L^2(G))$ を $L^2(G)$ 上の完全連続作用素全体のなす C^* 代数とし、 λ を $L^2(G)$ 上の G の正則表現としたとき、

$$C^*(\mathcal{A}; \alpha) \simeq (\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)))^{\alpha \hat{\otimes} Ad(\lambda)}$$

が成り立つ。

上の命題を使って主結果を導く為に、次の補助定理を用いる。

補助定理 5.4. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ は命題 5.3. と同様な仮定をする。 C^* -力学系 $(\mathcal{A} \otimes_{*} C(L^2(G)), G, \alpha \otimes \text{Ad}(\lambda))$ に対して、

$$P(\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)) = P(\alpha)$$

が成り立つ。

この補助定理と命題 5.3., 定理 4.3 を用いて次の主結果を得る。

定理 5.5. $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ は C^* -力学系とし、 $\mathcal{A}$ は素、 G は compact 可換群とする。その時、 $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$ が素である為の必要十分条件は、 $P(\alpha) = \hat{G}$ であることである。

よって、 $(\mathcal{A}(G), T^1, \alpha)$ について、命題 5.1. と定理 5.5 より $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は素になる。 $\mathcal{A}(G)$ は可分より、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は可分になる。よって、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は原始的である。 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は単位元を含まないので、 $\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)} = (0)$ となる。このことより次の定理を得る。

定理 5.6. CAR-代数 $\mathcal{A}(G)$ 上の一次元 torus T^1 の gauge 作用 α に対して、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$ は原始的である。特に、

$$P(\alpha) = \ker \hat{\alpha}|_{\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)}} = \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

§注意1. 定理 5.6. に於いて, $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)$ は単純ではない.

§注意2. 定理 4.3. は Olesen-Pedersen-Størmer 著の「Compact abelian groups of automorphisms of simple C^* -algebras」Preprint (1976) の定理 1 と重複している.

§注意3. $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ を compact abelian C^* -dynamical system としたとき,

$$C^*(\mathcal{A}; \alpha) \simeq \overline{\text{span}} \{ \alpha^p(\{p\}) \otimes C^*(\mathcal{G}) \hat{u}_p : p \in \hat{\mathcal{G}} \}$$

となる.

文献

- [1] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama : Multipliers of C^* algebras, *J. Func. Anal.* 13 (1973), 277-301.
- [2] O. Bratteli : Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Sci.* 172 (1972), 195-234.
- [3] A. Connes : Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École. Nor. Sup.* 4^e, t. 6. (1973), 133-252.
- [4] A. Connes and M. Takesaki : The flow of weights on factors of type III. Preprint (1975)
- [5] J. Dixmier : Sur les C^* -algèbres, *Bull. Soc. Math. France.* t. 88 (1960), 95-112.
- [6] R. H. Hermann and M. Takesaki : States and automorphism groups of operator algebras, *Comm. Math. Phys.* 19 (1970), 142-160.
- [7] T. Imai and H. Takai : On a duality for C^* -crossed products by a locally compact group. Preprint (1976)
- [8] A. Kishimoto and H. Takai : On an invariant $T(\alpha)$ in C^* -dynamical systems, To appear in *Tohoku. Math. J.*
- [9] Y. Nakagami : Dual action of a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group,

submitted to Publ. RIMS, Kyoto Univ.

- [10] D. Olesen : Inner $*$ -automorphisms of simple C^* -algebras, *Comm. Math. Phys.* 44 (1975), 175-190.
- [11] D. Olesen, G.K. Pedersen and E. Størmer : Periodic automorphisms of simple C^* -algebras, Preprint (1976).
- [12] E. Størmer : The even CAR-algebra, *Comm. Math. Phys.* 16 (1970), 136-137.
- [13] H. Takai : On a duality for crossed products of C^* -algebras, *J. Func. Anal.* 19 (1975), 25-39.
- [14] H. Takai : The quasi-orbit space of continuous C^* -dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 216 (1976), 105-113.
- [15] M. Takesaki : Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta. Math.* 131 (1973), 249-310.
- [16] G. Zeller-Meier : Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. Math. pures et appl.* 47 (1968), 101-239.
- [17] M. Takesaki : A liminal crossed product of a uniformly hyperfinite C^* -algebra by a compact abelian automorphism group, *J. Func. Anal.* 7 (1971), 140-146.