

細長い物体のまわりのおそい流れ

東大 生研 成瀬文雄

§1 あらまし

細長い物体のまわりのおそい流れについて、つぎの仮定で研究する。1. 基礎方程式はストークス方程式、2. 物体の形は任意で、代表的長さをも l とする、3. 物体の断面の形も任意（円への写像関数が既知）で、代表的長さをも b とする、4. 物体の速度 $U_0(x)$ は任意で、物体にそって変ってよい、ここでは物体の中心線にそって、ある点から測った長さとする、5. 物体が存するときの速度 $U(r)$ 、圧力 $P(r)$ はストークス方程式を満たす範囲内で任意に変えられている。ここで r は位置ベクトルである、6. $k(=b/l) \ll 1$ を仮定する。

以上のような仮定のもとに、 $O(k^2, 0 < \nu < 1)$ まで正しい積分方程式を、そりつなぎ法で導出し、つぎのような場合に、この積分方程式の厳密解が得られることを示す。（十次頁下注）
(i) 断面の大きさ b が l に比べて、ある特別の分布をしてゐる

とこの直線状物体の運動。(ii) 断面が一様なリングの運動。
 (iii) 断面が一様でかつ無限に続く螺旋状物体の回転してしかも
 適当な速度での直進運動。

細長い物体のまわりのおそい流れについては、断面が円の場合には、Hancock¹⁾, Tchen²⁾, Cox³⁾, Keller & Rubinow⁴⁾などによって、また断面が円または楕円でかつ直線状物体の場合には Batchelor⁵⁾によって、積分方程式による方法またはパラメータ $\varepsilon(=(\log \frac{1}{k})^{-1})$ による展開の方法で研究されてきた。本稿の研究は上記文献と比較して、つぎの点に特徴がある。(1) 得られた積分方程式または ε による展開の方法、それぞれ、断面の形が任意(円柱への写像関数が既知)である場合に適用できること。(2) 断面が一様なリングの運動の解は、リング面に直角な運動を除いて、断面が円の場合に比べても、 $O(k^v, 0 < v < 1)$ の精度まで正しい解は得られていると思われるが、断面が任意の場合に比べてこの精度まで正しい解が得られたこと。(3) 無限に続く螺旋の運動については、断面が円の場合、積分方程式の解が Lighthill (Flagellar Hydrodynamics) 積分方程式の厳密解は $\varepsilon(=(\log \frac{1}{k})^{-1})$ による展開の解と ε^{∞} まで重ね合わせることにまつても得られる。筆者が本研究集会でなした講演のときには、このような方法によって本稿にのべられている結果と同一の結果を示した。

namics, Lecture Note, 1975) によって得られているが、断面が任意の場合に拡張されていること。

§2. 基礎方程式と相似つなぎ法

いま無次元化変数として

$$\varphi = \varphi^*/U_0, \quad r = r^*/\ell, \quad p^*\ell/\mu U_0 = p \quad (1)$$

とすると、ストークス方程式は

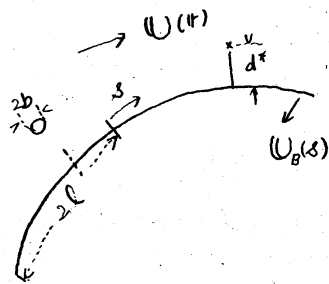
$$\Delta \varphi - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \varphi = 0 \quad (2)$$

となる。また境界条件はつぎのようになる。

$$\text{物体上: } \varphi = U_0(s) \quad (3)$$

$$\text{物体がなるとき: } \varphi = U(r), \quad p = P(r) \quad (4)$$

この問題には代表的長さが2つある。1つは物体の長さの尺度を表わす ℓ と、他の1つは物体の断面の尺度を表わす b



第1図

である。したがってこれらを使って2つの変数を作ることができる。いま与えられている点から物体までの距離を d^* とするとき、

$$d = d^*/\ell, \quad \bar{d} = d^*/b \quad (5)$$

で定義される d , $\bar{d}$ を用いて、 $d \sim O(1)$ を外部領域とし、 $\bar{d} \sim O(1)$ を内部領域としよう。

§3 外部領域と外部解

細長い物体の中心線上にストークス源、二重ストークス源、
 --- を分布させて、外部解として用いることができる。二
 重ストークス源、--- は物体上の境界条件を満足させよう
 とするときには必要であるが、外部解で果た役割はストーク
 ス源と比較して $O(K)$ だけ少なくなる。したがって、 $O(K^\nu)$
 $(0 < \nu < 1)$ まで正しい結果を花のようとする現在、中心線上に
 ストークス源だけ分布させたので充分である。

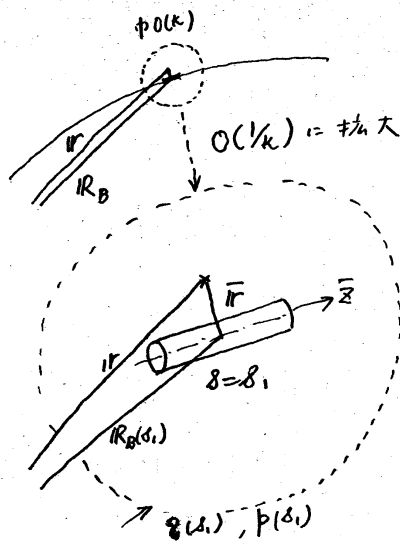
$d = d^*/l \sim O(1)$ が外部領域であるから、外部変数 $r = r^*/l$
 とし、 δ 上に強さ、方向とも未定のストークス源 $C(\delta) \mathbf{e}'(\delta)$
 を分布させたものを外部解としてとる。このとき外部解の速
 度 u 、圧力 p はつぎのように表わされる。

$$u = U(r) - \int_{\delta_0}^{\delta_2} C(\delta) \left\{ \frac{\mathbf{e}'(\delta)}{R} + \frac{(\mathbf{e}'(\delta) \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right\} d\delta \quad (6)$$

$$p = P(r) - 2 \int_{\delta_0}^{\delta_2} C(\delta) \frac{(\mathbf{e}'(\delta) \cdot \mathbf{R})}{R^3} d\delta \quad (7)$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B(\delta)$ であり、また $\mathbf{R}_B(\delta)$ は $d\delta$ の位置ベクトル
 である。なおストークス源の強さ $C(\delta)$ 、方向 $\mathbf{e}'(\delta)$ は内部解と
 のマッチングにより定まる量である。

§4 内部領域と内部解



第2図

内部領域は $\bar{d} = \frac{d^2}{b} \sim O(1)$ である

から、内部変数 $\bar{r}$ として

$$\bar{r} = (r - R_B(\delta)) / k \quad (8)$$

のようにとる。この場合内部領域の中 $O(k)$ の部分が $O(1)$ に拡大されることになる。いま $O(k)$ の量を省略するとき、内部領域ではつぎのようになることが成立する。

(1) 物体の形は2次元物体 ($\bar{z}$ 方向

に変化しない) として取扱ってよい。

(2) 物体より遠く、共通領域 ($\bar{r} \sim O(1/k\delta)$, $0 < \delta < 1$) は外部変数 $d \sim 0$ の領域と考えてよいから、共通領域での速度、圧力は外部解より $q(\delta)$, $p(\delta)$ の形で与えられる。したがって内部領域の問題としては、 $q(\delta)$, $p(\delta)$ の一様流中に2次元物体がおかれたとその解をもつてくれればよい。

(3) 細長い物体がある流れの中にあるとき、物体近傍まで流れの状態はあまり変化しないで、物体近傍つまり内部領域で急速に速度の変化がおこる。したがって、粘性力、圧力とも $O(\frac{1}{k} \cdot \frac{\mu U_0}{\rho})$ の量で、大変大きな力が表面に働くことになる。

以上の様なことを考慮して、内部変数はつぎのように選ばれる。

$$\bar{r} = (r - R_0(s_1)) / \kappa, \quad \bar{q} = q, \quad \bar{p} = \kappa (p - p_0) \quad (9)$$

いま $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, e は $\bar{z}$ 方向の単位ベクトルとし、
「 z 」のように e に平行な流れと e に直角な流れに分割する。

$$\bar{q} = \omega t + \psi \quad (10)$$

$$U_B(s_1) = \omega_B(s_1) e + \psi_B(s_1), \quad (U(s_1) = W(s_1) e + V(s_1)) \quad (11)$$

(10), (11) を (2), (3) に代入して $\partial/\partial \bar{z} = 0$ を用いるとき、

$\omega = \omega(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ に対する方程式及び境界条件として

$$\Delta \omega = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{物体上: } \omega = \omega_B(s_1) \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\Delta \psi - \nabla \bar{p} = 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{物体上: } \psi = \psi_B(s_1) \end{array} \right\} \quad (13)$$

が得られる。ここで Δ, ∇ とともに 2 次元 $(\bar{x}, \bar{y})$ に関するオペレーターである。

(i) ψ に対する解

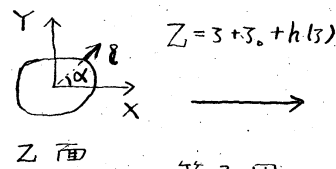
2 次元物体のまわりのおそい流れにおける内部解(文献(6))がそのまま適用できる。 $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \bar{r}$ で $\bar{r}$ を定義して、 $\bar{r} \gg 1$ のとき $\omega, \bar{p}$ は「 z 」のような漸近解をもつ。

$\bar{r} \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= B \left[\left(\log \frac{\bar{r}}{a_1} - b_1(l) \right) e - \frac{(l \cdot \bar{p}) \bar{r}}{\bar{r}^2} - c_1(l) \right] + \omega_B(s_1) + O\left(\frac{1}{\bar{r}}\right) \\ \bar{p} &= -\frac{2B(l \cdot \bar{p})}{\bar{r}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここでストークス源の強さ及び方向を表わす B , l は未定

で、マッチングからきまる。また Z 面 ($\bar{z}$ に直角な面) にお



ける断面の形が、写像関数

$$Z = z + \bar{z} + h(z) \quad (z \rightarrow \infty: h(z) \rightarrow 0)$$

で Z 面の半径 a の内に写像さ

れるとき、 $a, b_1(l), c_1(l)$ はつぎのようになります。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a, & b_1(l) &= -\frac{1}{2} (1 + r \cos(\beta + 2\alpha)), & c_1(l) &= \frac{\sigma}{2} \sin(\beta + 2\alpha) \\ \text{ここで} & & r e^{i\beta} &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(a e^{-i\theta}) - a e^{-i\theta} h'(a e^{i\theta})}{e^{i\theta} (1 + h'(a e^{i\theta}))} d\theta \end{aligned} \right\} (15)$$

また α は l と X 軸とのなす角である。

ストークス源の強さ及び方向 B , l がきまるとき、単位長を当り物体に働く力の $\bar{z}$ に直角な成分 F' は

$$F' = 4\pi\mu U_0 B l \quad (16)$$

で与えられる。

(ii) w に対する解

$w = f(z) + g(\bar{z})$ を用いて (14) 式に相当する解を求めるとき

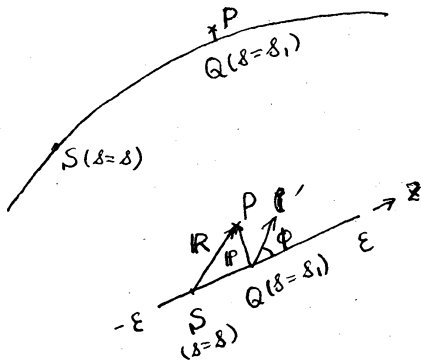
$$\bar{P} \gg 1: \quad w = A \log \frac{\bar{P}}{a_1} + w_B(l_1) + O\left(\frac{1}{\bar{P}}\right) \quad (17)$$

が得られ、また単位長を当り物体に働く力の $\bar{z}$ 成分 $F_{\bar{z}}$ は

$$F_{\bar{z}} = 2\pi\mu U_0 A \quad (18)$$

のようになります。

§5 共通領域における外部解の表示



第4図

共通領域の点を P とし、 P から最も近い物体上の位置を $Q (\delta = \delta_1)$

とする。 $\vec{QP} = R$ とおくと、

$$P \sim O(k^{1-\delta}, 0 < \delta < 1) \text{ となる。}$$

(6) 式のつぎの積分に注目しよう。

$$I = \int_{\delta_0}^{\delta_2} c(\delta) \left\{ \frac{l'(\delta)}{R} + \frac{(l'(\delta) \cdot R)}{R^3} \right\} d\delta$$

この積分に含まれる R は $\delta = \delta_1$ の付近で $O(k^{1-\delta}, 0 < \delta < 1)$ の量となるため、 δ_1 の付近だけこの積分を分離して取扱う。

$$I = \int_{\delta_0}^{\delta_1 - \epsilon} + \int_{\delta_1 - \epsilon}^{\delta_1 + \epsilon} + \int_{\delta_1 + \epsilon}^{\delta_2} c(\delta) \left\{ \frac{l'(\delta)}{R} + \frac{(l'(\delta) \cdot R)}{R^3} \right\} d\delta = I_1 + I_2 + I_3 \quad (17)$$

のごとくわけて、第2番目の積分 I_2 に対し、 $P \ll \epsilon \ll Q$ のように ϵ をとり、その部分の物体を図のごとく直線でおきかえる。また $l'(\delta)$ の z 軸となす角を ϕ 、 $l'(\delta)$ の z に直角な面への射影の方向を x' 方向にとり、 x' 方向の単位ベクトルを $e_{x'}$ とおく。また現在の近似の程度では、 I_2 の積分において

$R = \vec{SP}$ として計算しなればならないが、 I_1, I_3 においては $R = \vec{SQ}$ とおいたのでいい。

以上のような注意をして、共通領域 P における外部解の速度を計算するとき、 ϕ は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= U(\delta_1) + \left[4C(\delta_1) \cos \phi (\log P - \log 2 + \frac{1}{2}) \right] \pi \\
 &\quad + 2C(\delta_1) \sin \phi \left\{ (\log P - \log 2) \mathcal{E}_x' - \frac{(P \cdot \mathcal{E}_x')}{P^2} P \right\} + K(\delta_1), \\
 \text{ここで} \quad K(\delta_1) &= \int_{\delta_0}^{\delta_1 - \varepsilon} + \int_{\delta_1 + \varepsilon}^{\delta_2} \left\{ -C(\delta) \left(\frac{\mathcal{E}'(\delta)}{R} + \frac{(\mathcal{E}'(\delta) \cdot R)}{R^3} R \right) \right\} d\delta \\
 &\quad - 4C(\delta_1) \cos \phi \pi \log \varepsilon - 2C(\delta_1) \sin \phi \mathcal{E}_x' \log \varepsilon
 \end{aligned} \tag{20}$$

のようにならる。ここで R は δ と δ_1 を結ぶベクトルである。
 また上式で ~~~~~ の部分は、(19) の I_2 の計算の結果で与えたものである。

§6 共通領域におけるマッチングと積分方程式

共通領域 P の内部解の表示は、(14), (17) に $\bar{P} = P/\kappa$ と代
 入し、かつ $\lambda = \log 1/\kappa$ とおいて

$$\mathcal{F} = A(\log P + \lambda - \log a_1) \pi + B \left[(\log P + \lambda - \log a_1 - b_1(\varepsilon)) \mathcal{E} - \frac{(P \cdot \mathcal{E})P}{P^2} - C_1(\varepsilon) \mathcal{F} \right] + U_0(\delta_1) \tag{21}$$

のようにならる。(20), (21) のマッチングから

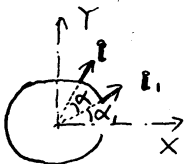
$$\begin{aligned}
 4C(\delta_1) \sin \phi &= A, \quad 2C(\delta_1) \sin \phi = B, \quad \mathcal{E}_x' = \mathcal{E} \\
 C(\delta_1) \mathcal{E}'(\delta_1) &= C(\delta_1) \cos \phi \pi + C(\delta_1) \sin \phi \mathcal{E}_x' = (A/4) \pi + (B/2) \mathcal{E}
 \end{aligned} \tag{22}$$

が得られる。また (20) と (21) を等置して、(22) を代入すると
 え、 $A(\delta)$, $B(\delta) \mathcal{E}(\delta)$ の3箇の未知関数に対するつぎの積分方
 程式が得られる。

$$K(s, t) = A(\lambda + \log 2 - \frac{1}{2} - \log a_1) \pi + B[(\lambda + \log 2 - b_1(s) - \log a_1) s - c_1(s) \bar{s}] + U_B(s, t) - U(s, t) \quad (23)$$

$$K(s, t) = \int_{s_0}^{s_1-\varepsilon} + \int_{s_1+\varepsilon}^{s_2} \left[-\frac{\frac{A}{4}\pi + \frac{B}{2}s}{R} - \frac{\{\frac{A}{4}(R \cdot t) + \frac{B}{2}(R \cdot s)\}}{R^3} \right] ds - (A\pi + B\varepsilon) \log \varepsilon$$

積分方程式 (23) は未定のベクトル $\bar{b}$ を含み、かつ $b_1(s)$ 、 $c_1(s)$ などは $\bar{b}$ の方向によって変るから取扱難い。この点を改良するたの、 $\bar{b}$ 、 $\bar{s}$ の代りに $\bar{b}_1$ 、 $\bar{s}_1$ を導入し、 $\bar{b}_1$ 、 $\bar{s}_1$ の方向はあらかじめの定めておいて、積分方程式の書き換えをする。



乙面

第5図

$$B\bar{b} = I\bar{b}_1 + J\bar{s}_1, \quad b_1(s) = -\frac{1}{2} + \bar{b}_1(s) \quad (24)$$

とおき、また乙面での X と $\bar{b}_1$ のなす角を α_1 、

$\bar{b}$ と $\bar{b}_1$ のなす角を α とおくと、(15)、(24) より

$$\bar{b}_1(s) = -\frac{s}{2} \cos(\beta + 2\alpha_1 + 2\alpha), \quad c_1(s) = \frac{s}{2} \sin(\beta + 2\alpha_1 + 2\alpha)$$

$$\bar{b}_1(s_1) = -\frac{s_1}{2} \cos(\beta + 2\alpha_1), \quad c_1(s_1) = \frac{s_1}{2} \sin(\beta + 2\alpha_1)$$

$$\cos \alpha = \frac{I}{B}, \quad \sin \alpha = \frac{J}{B}$$

が成立する。上式より α の関係式が得られる。

$$B(\bar{b}_1(s) \bar{b}_1 + c_1(s) \bar{s}_1) = (I\bar{b}_1(s_1) + Jc_1(s_1)) \bar{b}_1 + (-J\bar{b}_1(s_1) + Ic_1(s_1)) \bar{s}_1$$

上式を (23) に代入し、 $s_1 \rightarrow s$ 、 $s \rightarrow s'$ の変数変換をして、

$$K = A(\lambda + \log 2 - \frac{1}{2} - \log a_1) \pi + [(\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(s_1) - \log a_1) I - c_1(s_1) J] \bar{b}_1 + [-c_1(s_1) I + (\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(s_1) - \log a_1) J] \bar{s}_1 + U_B(s) - U(s) \quad (25)$$

$$K = \int_{s_0}^{s_1-\varepsilon} + \int_{s_1+\varepsilon}^{s_2} \left[-\frac{\frac{A}{4}\pi + \frac{1}{2}(I\bar{b}_1 + J\bar{s}_1)}{R} - \frac{\frac{A}{4}(R \cdot \pi) + \frac{1}{2}\{I(R \cdot \bar{b}_1) + J(R \cdot \bar{s}_1)\}}{R^3} \right] ds' - (A\pi + I\bar{b}_1 + J\bar{s}_1) \log \varepsilon$$

が得られる。未知関数 $A(s)$, $I(s)$, $J(s)$ に關する積分方程式 (25) がとけるとき、物体に働く力が決定できる。いま ds 部分に働く力を $f ds$ とするとき

$$f = 2\pi\mu U_0 (A\kappa + 2B\ell) = 2\pi\mu U_0 (A\kappa + 2I\ell_1 + 2J\ell_2) \quad (26)$$

となり、物体に働く力 TF 及び原点のまわりのトルク G は

$$TF = \ell \int_{s_0}^{s_2} f ds, \quad G = \ell^2 \int_{s_0}^{s_2} r(s) \times f ds \quad (27)$$

のようになる。

特別の形の物体の運動に対しては、この積分方程式の解は容易にみつかすが、この解を直接求めることが難しい場合も多い。このときは解を $\varepsilon = (1/\lambda)$ について展開する方法で求めることができる。すなわち

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n A_n, \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n I_n, \quad J = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n J_n, \quad \kappa = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \kappa_n \quad (28)$$

のごとく展開して (25) 式に代入し、 ℓ_1 の方向を $W - \omega_0 = W_0$ の方向にとるとき、つぎの漸化式が得られる。

$$A_1 = W - \omega_0 = W_0, \quad I_1 = |W - \omega_0| = V_0, \quad J_1 = 0$$

$n \geq 2$:

$$A_n = \left(\log \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \right) A_{n-1} + \kappa_{n-1}$$

$$I_n = \left(\log \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} + \bar{b}_1(r_1) \right) I_{n-1} + c_1(r_1) J_{n-1} + d_{n-1}$$

$$J_n = \left(\log \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} - \bar{b}_1(r_1) \right) J_{n-1} + c_1(r_1) I_{n-1} + e_{n-1}$$

$$K_{n-1}\pi + d_{n-1}l_1 + e_{n-1}f_1 = K_{n-1} = \left. \begin{aligned} & \int_{\delta_0}^{\delta-\varepsilon} + \int_{\delta+\varepsilon}^{\delta_2} \left[-\frac{\frac{A_{n-1}}{4}\pi + \frac{1}{2}(I_{n-1}l_1 + J_{n-1}f_1)}{R} \right. \\ & \left. - \frac{\frac{A_{n-1}}{4}(R\cdot\pi) + \frac{1}{2}\{I_{n-1}(R\cdot l_1) + J_{n-1}(R\cdot f_1)\}}{R^3} R \right] d\delta' - (A_{n-1}\pi + I_{n-1}l_1 + J_{n-1}f_1)\log\varepsilon \end{aligned} \right\} (30)$$

まず (29) を用いて境界条件より A_1, I_1, J_1 が求まる。つぎに (30) の K_1 を計算して K_1, d_1, e_1 が求まり、さらに (30) より A_2, I_2, J_2 が求まる。以下この手順をくりかえせば高次の項まで求めることができる。

本稿では、以下において、積分方程式 (25) の厳密解を求めてみよう。

§7 直線状物体の運動

(i) 積分方程式の簡単化

(25) の積分 K が簡単な形になり、かつ π と π に直角方向に分離できる。その結果軸方向の流れについての積分方程式と軸に直角方向の流れに対する積分方程式がそれぞれつぎのようになれる。

(a) 軸方向の流れに対する積分方程式

$$\begin{aligned} K &= A \left(\lambda + \log 2 - \frac{1}{2} - \log \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{s^2}} \right) + w_B(s) - W(s) \\ \text{ここで} \quad K &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{A(s) - A(s')}{|s' - s|} ds' \end{aligned} \quad (31)$$

が軸方向の流れに対する積分方程式として得られ、なお代表的長と見れば物体の長さの半分にとつてある。(31)をこいて $A(s)$ がえられれば、軸方向に働く力 F_t は次式でえらる。

$$F_t = 2\pi\mu U_0 l \int_{-1}^1 A ds \quad (32)$$

(b) 軸に直角方向の流れに対する積分方程式

境界条件 $W - W_0 = W_0$ は s によらずにとり、 z_1 の方向に U_0 の方向にとる。このとき軸に直角方向の流れに対する積分方程式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} d &= (\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(l_1) - \log \frac{a_1}{\sqrt{1-s^2}}) I - c_1(l_1) J - V_0 \\ e &= -c_1(l_1) I + (\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(l_1) - \log \frac{a_1}{\sqrt{1-s^2}}) J \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで

$$d = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{I(s) - I(s')}{s' - s} ds', \quad e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{J(s) - J(s')}{s' - s} ds'$$

(33)をこいて $I(s), J(s)$ がえられれば、軸に直角に働く力 F' は

$$F' = 4\pi\mu U_0 l \left[l_1 \int_{-1}^1 I ds + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J ds \right] \quad (34)$$

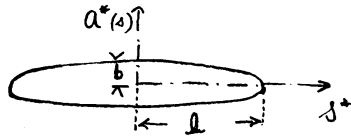
で与えられる。

(ii) 積分方程式をみたす解

(31), (33)を考慮して、つぎのような条件がみたされてゐるときには、積分方程式の解が容易にみつかう。

(1) $W_0 = W(\delta) - W_g(\delta)$, V_0 がこれに等しいとき δ により定数であるとき。

(2)



第 6 図

$a_1 = \sqrt{1 - \delta^2}$ すなわち

$$\frac{\delta^{*2}}{l^2} + \frac{a^{*2}(\delta)}{b^2} = 1 \quad (35)$$

が成り立つとき。ここで $*$ は

無次元化されている量を表わす。また $b = a^*(0)$ とするこゝに注意する。

(3) $\bar{b}_1(R_1)$, $C_1(R_1)$ が δ により定数であるとき。すなわち断面が相似な形をしていて、換わっているとき。

(a) 軸方向の流れ

(1), (2) の条件をみたすとき、 $A(\delta) = \text{一定}$, $k = 0$ の解として

$$A = \frac{W_0}{\log \frac{2l}{a^*(0)} - \frac{1}{2}}, \quad F_t = \frac{4\pi\mu W_0^* l}{\log \frac{2l}{a^*(0)} - \frac{1}{2}} \quad (36)$$

が得られる。

(b) 軸に直角方向の流れ

(1), (2), (3) がみたされているとき、 $I(\delta) = \text{一定}$, $J(\delta) = \text{一定}$,

$d = e = 0$ の解として、つぎの結果が得られる。

$$I = V_0 (\lambda + \log 2 + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(R_1)) / \Delta, \quad J = V_0 C_1(R_1) / \Delta$$

$$F' = 8\pi\mu V_0^* l \left[\left(\log \frac{2l}{a^*(0)} + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(R_1) \right) R_1 + C_1(R_1) \bar{b}_1 \right] / \Delta$$

ここで

$$\Delta = \left(\log \frac{2l}{a^*(0)} + \frac{1}{2} \right)^2 - \bar{b}_1^2(R_1) - C_1^2(R_1)$$

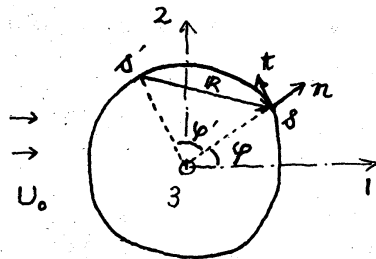
(37)

断面が円の場合には、ストークス方程式の厳密解が分っているから、(36)、(37)の精度を調べることができる。この場合(36)、(37)の誤差は $O(k^2)$ であることが分る。

§8 断面が一様なリングの運動

つぎの4節の場合について積分方程式の厳密解が存在する。

(i). 一様なリングのリング面内の運動



第7図

左図のように座標軸をとり、
($U_0, 0, 0$)の一様流中に半径 R のリングがおかれた場合について考える。
断面が一様な仮定から $\log a_1 = 0$ ととり
てよい。(25)式の $U(x)$ は

$$U(x) = -\sin \varphi x + \cos \varphi n \quad \text{と分るから、} \quad e_1 = n, \quad g_1 = e_3 \quad \text{ととる。}$$

(25)の A, I, J に於て

$$\left. \begin{aligned} A &= -\sin \varphi \bar{A}, \quad I = \cos \varphi \bar{I}, \quad J = \cos \varphi \bar{J} \\ \bar{A}, \bar{I}, \bar{J} &\text{ --- 一定} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

を仮定し、 IK の被積分項は δ' の関数であることに注意して積分すると

$$\begin{aligned} IK &= -\sin \varphi x \left[(-2 \log 2 + \frac{3}{2}) \bar{A} - 2 \bar{I} \right] + \cos \varphi n \left[(2 \log 2 + 1) \bar{I} \right. \\ &\quad \left. - \bar{A} \right] + \cos \varphi e_3 \left[(-2 \log 2 + 2) \bar{J} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

が得られる。(39)を(25)に代入して $\bar{A}, \bar{I}, \bar{J}$ が決定でき、

このようにして得られた $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ と (26), (27), (38) より物体に働く力 F が求まる。 F の主流方向の成分 F_1 は

$$F_1 = \frac{3\pi\mu U_0 L \left[S^2 + \left(\frac{2}{3}\bar{b}_1 - \frac{13}{3}\right)S + \frac{17}{4} - \frac{7}{3}\bar{b}_1 - \frac{1}{3}(\bar{b}_1^2 + c_1^2) \right]}{S^3 - 4S^2 + \left(\frac{11}{4} + \bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 - c_1^2\right)S + \frac{3}{2} - 4\bar{b}_1 + 2(\bar{b}_1^2 + c_1^2)} \quad (40)$$

ここで

$$S = \log(8\ell/a^*) \quad , \quad L = 2\pi\ell \quad (41)$$

のようになる。断面が楕円（半長軸の長さ A^* , 半短軸の長さ B^* ）のときには、 ℓ と半長軸の間の角を α とおいて、(15) より

$$a^* = \frac{A^* + B^*}{2} \quad , \quad \bar{b}_1 = -\frac{\sigma^2}{2} \cos 2\alpha \quad , \quad c_1 = \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\alpha \quad , \quad \sigma^2 = \frac{A^* - B^*}{A^* + B^*} \quad (42)$$

のようになればよいことが分る。

(ii) 一様なリングのリング面に直角方向の運動

第9図のように座標軸をえらび、 $(0, 0, V_0)$ の一様流中に上記のリングがおかれた場合を考える。 $U(1) = e_3$ とするから、 $e_1 = e_3$, $\theta_1 = \pi$ とおいて、 $A=0$, $I=\text{const}$, $J=\text{const}$ の解が存在する。(i) と同じような計算をして、物体に働く主流方向の成分 F_3 は

$$F_3 = \frac{4\pi\mu U_0 L \left(S - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 \right)}{S^2 - 2S - \frac{5}{4} + 3\bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 - c_1^2} \quad (43)$$

となる。 S, L は (41) と同様で、 $a^*, \bar{b}_1, c_1$ は断面が楕円の時とは (42) をもつてくれればよい。ただし α は、ここでは、 e_3 と半長軸の間の角になる。とくに断面が円の時には、

Tchen²⁾ と Masuda⁷⁾ の結果と一致する。

(iii) 一様なリングの3軸のまわりの回転



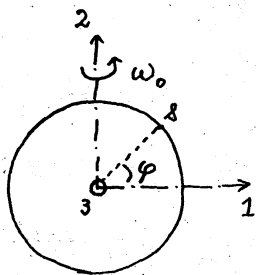
第8図

角速度 $\omega = (0, 0, \omega_3)$ で回転しているとき、 $U_3 = c$ となり、 $A = \text{const}$, $I = J = 0$ の解がある。リングに働く3軸のまわりのモーメント G_3 は

$$G_3 = - \frac{2\pi\mu l^2 \omega_3 L}{S-2} \quad (44)$$

で与えられる。ここで S, L は (41) と同様である。

(iv) 一様なリングの2軸のまわりの回転



角速度 $\omega = (0, \omega_2, 0)$ で回転しているとき、 $U_3 = -\omega_2 \varphi \cdot e_3$ となり、 $l_1 = e_3$, $\theta_1 = \pi$ ととりよる。ii) の場合と同じように (38) を仮定して K を計算し、リングに働

く2軸のまわりのトルク G_2 は

$$G_2 = - \frac{2\pi\mu l^2 \omega_2 L [S^2 + (\bar{b}_1 - \frac{5}{2})S - 1 - 2\bar{b}_1]}{S^3 - 4S^2 + (\frac{11}{4} - \bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 - c_1^2)S + \frac{3}{2} + 4\bar{b}_1 + 2\bar{b}_1^2 + 2c_1^2} \quad (45)$$

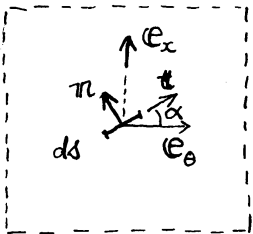
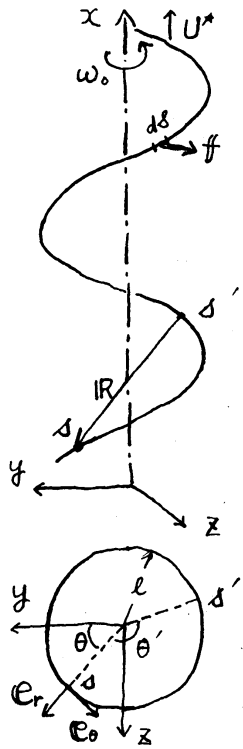
のようにならされる。 S, L は (41) と同様であり、 $a^*, \bar{b}_1, c_1$ については ii) の場合と同じものをとればよい。

とくに $c_1 = 0$ のときには (45) はつぎのようになる。

$$G_2 = - \frac{2\pi\mu l^2 \omega_0 L}{S - \frac{3}{2} - \bar{b}_1} \quad (46)$$

いま $-\frac{1}{2} \leq \bar{b}_1 \leq \frac{1}{2}$ と考えられるから、(44) と (46) を比較して、 $|G_3| \geq |G_2|$ が成立する。 $\bar{b}_1 = \frac{1}{2}$ (断面が平板状) のとき $|G_3| = |G_2|$ となる。

§9 無限に続き、かつ断面が一樣である螺旋状物体の運動



第10図

螺旋の ds 部分に働く力を $f ds$ とする。いま $f \cdot e_x \neq 0$ ないとき、ストークス方程式の解は存在しない (軸方向に運動する二次元物体に対しストークス方程式の解が存在しないのと同じ理由)。ストークス方程式の解が存在するためには $f \cdot e_x = 0$ が必要である。この条件は z 軸のまわりに角速度 ω_0 で回転し、かつ z 軸方向に適當な速度 U^* で前進してゐるときに満たれる。以下において丁度このような場合を考へる。

いま位置ベクトルを螺旋の振幅 l で、速度ベクトルを $l\omega_0$ で無次元化するとしよう。さて第10図のように、 ds と e_x を含む平面を考へ、 π を ds に垂直でかつこの面内

にある単位ベクトル、 α を dS と $\mathbb{C}_0$ の間の角とする。いま

$$U_B = \mathbb{C}_0 + U \mathbb{C}_x = (\cos \alpha + U \sin \alpha) \# + (-\sin \alpha + U \cos \alpha) \pi$$

であるから $\bar{R}_1 = \pi$, $\bar{J}_1 = \mathbb{C}_r$ とする。このとき A, I, J はい

づれとも α に依存しない定数と仮定することができ。 $\# \cdot \mathbb{C}_x = 0$

の条件から $A \sin \alpha + 2I \cos \alpha = 0$ でなければならぬ。そこで

で $A = B \cos \alpha$, $I = -B \sin \alpha / 2$ とおいて K を計算して

$$K = \frac{B}{2} \left[1 + (1 + \cos^2 \alpha) \log \cos \alpha - \sin^2 \alpha R_1 - 2 \cos^2 \alpha R_2 \right] \mathbb{C}_0 + \frac{B}{2} \cos \alpha \sin \alpha (\log \cos \alpha - R_1) \mathbb{C}_x + J \left[1 + \log \cos \alpha - \sin^2 \alpha R_1 - 2 \cos^2 \alpha R_2 + \cos^2 \alpha R_3 \right] \mathbb{C}_r \quad (47)$$

ここで

$$R_i = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{T_i dt}{(\sin^2 \alpha t^2 + 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}} + \log \varepsilon, \quad \left. \begin{array}{l} T_1 = t \sin t \\ T_2 = \sin^2 t \\ T_3 = 4 \sin^2 \frac{t}{2} \end{array} \right\} \quad (48)$$

となる。(47) と (25) に代入すると、 B, J, U は α の関

数となる。

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha} \cdot \frac{Q_1}{\Delta}, & J &= \frac{C_1 \sin \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha) \Delta} \\ U &= \frac{U^*}{l \omega_0} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \left[1 + \frac{2 \{ \bar{b}_1 - \frac{1}{2} + \cos^2 \alpha (R_1 - R_2) \} Q_1 + 2 C_1^2}{(1 + \cos^2 \alpha) \Delta} \right] \\ \Delta &= Q_1 Q_2 - \frac{C_1^2 \sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \\ Q_1 &= \log \frac{2l}{a^* \cos \alpha} - \frac{1}{2} + \bar{b}_1 + \sin^2 \alpha R_1 + 2 \cos^2 \alpha R_2 - \cos^2 \alpha R_3 \\ Q_2 &= \log \frac{2l}{a^* \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} \left(\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{2} + \sin^2 \alpha \bar{b}_1 - \sin^2 \alpha R_1 - 2 \cos^2 \alpha R_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

また、物体の単位長さ $\frac{l}{a}$ による働く力 $\#$ は

$$f = 2\pi\mu l\omega_0 (B e_0 + 2J e_r) \quad (50)$$

となり、 a^* , $\bar{b}_1$, c_1 は断面が楕円のときには (42) で与えられる。とくに断面が円 ($c_1=0$, $\bar{b}_1=0$) のときには、Lighthill (Flagellar Hydrodynamics, Lecture Note, 1975) によって得られた結果と一致する。

§10 まとの

細長い物体のまわりのおそい流れについては、流体力学的立場から興味があるばかりでなく、微小な生物の運動、レオロジーなどに関連してその研究の推進が望まれている。例えば螺旋状物体の運動のところで得られた (49) 式で、 $U = U^*/l\omega_0$ の式は、頭部のない微小な生物が螺旋状の波動運動をしながらか前進するときの (前進速度/波の伝播速度) $\times \tan\alpha$ と与えられることになる。微小な生物のべん毛が、螺旋状の波動運動するとき、表面圧力が非常に大きくなるから、断面の形が円から変形する事も考えられ、そのような場合に同式は用いられてよい。また断面が一様なリングが運動するときの結果は、レオロジー関係でその利用が期待されてよい。

一般に積分方程式 (25), (31), (33) の厳密解を見出すことがむづかしい場合が多い。このときは ε による展開の形で解を求めることが出来る。例えば $a(x)$ が §7 (2) の条件をみたすな

直線状物体、円弧状物体、直進または回転する有限の長さの螺旋などの運動に対しては、 ε による展開の方法で流れの状態を解析し、直線状物体に対しては $O(\varepsilon^3)$ 、その他の場合については $O(\varepsilon^2)$ まで求められている。

文 献

- (1) G. J. Hancock : Proc. Roy. Soc. Ser. A 217 (1953) 96
- (2) C. M. Tchen : J. Appl. Phys. 25 (1954) 463
- (3) R. G. Cox : J. Fluid Mech. 44 (1970) 791
- (4) J. B. Keller & S. L. Rubinow : J. Fluid Mech. 25 (1976) 705
- (5) G. K. Batchelor : J. Fluid Mech. 44 (1970) 419
- (6) 成瀬 文雄 : 京都大学数理解析研究所講究録, 234, 4 (1975)
- (7) H. Masuda : Bulletin of Faculty of General Education, Utsunomiya University, No. 3 (1970), Sec. 2, 11