

楕円型作用素のスペクトルと局所エネルギーの減衰度

都立大 理数 村田 實

§ 1. 序

$L_2(\mathbb{R}^n)$ における自己共役作用素

$$H = P(D) + \sum_{j=1}^N \varrho_j(x) Q_j(D) .$$

を次の仮定 (A) のもとで考えよう.

(A) (1) $P(\xi)$ は m 次実係数楕円型多項式.

(2) $Q_j(\xi)$ ($j=1, \dots, N$) は次数 $m-2$ 以下の実係数多項式.

(3) $\varrho_j \in W_{\infty}^{m_j}(\mathbb{R}^n)$ ($m_j = \deg Q_j$, $j=1, \dots, N$),

$$\sum_{j=1}^N \varrho_j(x) Q_j(D) = \sum_{j=1}^N Q_j(D) (\overline{\varrho_j}(x) \cdot) .$$

(4) ある $\rho > \frac{1}{2}$ が存在して, $(1+|x|^2)^{\rho} \varrho_j(x) \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$
($j=1, \dots, N$).

このとき、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial t} = H u \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

。解 $e^{itH}\varphi$ の局所エネルギー $\left(\int_K |e^{itH}\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ ($K \subset \mathbb{R}^n$) は $t \rightarrow \infty$ のとき減衰することが知られているが (c.f. [1])。その減衰度を考察するのが本稿の目的である。

§2. 結果

2.1. 記号. P の危値の全体 $\{P(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n, \operatorname{grad} P(\xi) = 0\}$ を $\Lambda(P)$ であらわす。 $\Lambda(P)$ は有限集合である。 $(P - \lambda \pm i0)^{-1}$ 及び $\delta(P - \lambda)$ は次の様に定義される $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ への作用素である。

$$((P - \lambda \pm i0)^{-1}, u, v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \frac{(u \bar{v})(\xi) d\xi}{P(\xi) - \lambda \pm i\varepsilon},$$

$$u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\delta(P - \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \{ (P - \lambda - i0)^{-1} - (P - \lambda + i0)^{-1} \}.$$

右辺の極限は任意の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda(P)$ に対して存在して、 $\mathbb{R} \setminus \Lambda(P)$ で C^∞ -級であるが、 $\Lambda(P)$ の近傍ではその特異性に応じて正則性が異なる。

H^σ は普通の Sobolev 空間で、 H_ρ^σ は重み付きの Sobolev

空間である。

$$H_p^\sigma = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) ; \|f\|_{H_p^\sigma} = \| (1+|\Delta|^2)^{\frac{\sigma}{2}} (1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} f(x) \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty \}.$$

X を Banach 空間とする。 X -値関数となる Besov 空間

$B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n; X)$ は以下のように定義される (c.f. [2]).

(i) $\sigma = k + \theta$ ($0 < \theta < 1$, k : 非負整数) のとき.

$$B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n; X) = \{ f \in W_p^k(\mathbb{R}^n; X) ; \|f\|_{B_{p,q}^\sigma} = \|f\|_{W_p^k} + \sum_{|\alpha|=k} \left[\int (|y|^{-\theta} \|D^\alpha f(x+y) - D^\alpha f(x)\|_{L_p})^q \frac{dy}{|y|^n} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \}.$$

(ii) $\sigma = k + 1$ (k : 非負整数) のとき.

$$B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n; X) = \{ f \in W_p^k(\mathbb{R}^n; X) ; \|f\|_{B_{p,q}^\sigma} = \|f\|_{W_p^k} + \sum_{|\alpha|=k} \left[\int (|y|^{-1} \|D^\alpha f(x+2y) - 2D^\alpha f(x+y) + D^\alpha f(x)\|_{L_p})^q \frac{dy}{|y|^n} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \}.$$

例えば $\sigma > 0$ として.

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda) f(\lambda), \quad f(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{\sigma-1}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases},$$

$$\varphi(\lambda) \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1 \\ 0, & |\lambda| > 2 \end{cases}$$

とおくと $g(\lambda) \in B_{1,\infty}^\sigma(\mathbb{R}) \setminus W_1^\sigma(\mathbb{R})$. 又 $P(\xi) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$

とすると

$$(\delta(P-\lambda) \cdot u, v) = \begin{cases} \lambda^{\frac{n}{2}-1} \int_{S^{n-1}} (u \bar{v})(\lambda^{\frac{1}{2}} \omega) d\omega, & \lambda > 0 \\ 0 & \lambda < 0. \end{cases}$$

従って $\varphi(\lambda)(\delta(P-\lambda) \cdot u, v) \in B_{1,\infty}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}) \setminus W_1^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R})$.

2.2. 一般固有関数. H のスペクトル密度 $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda}$ ($E(\lambda)$ は H に付随する 1 の分解) の $\mathcal{L}(P)$ の近傍での正則性を調べるのに、次の一般固有関数の概念が重要である。

定義 $\mu \in \mathcal{L}(P)$ とする. $Q_j(z)(P(z)-\lambda-i0)^{-1}$.

($j=1, \dots, N$) が μ の近傍で $B(H^s, H^{-s})$ -値関数として Hölder 連続であるとする。(ここで ρ は (A.4) で与えられたもの。) このとき方程式

$$u + \mathcal{F}^{-1} \left[\sum_{j=1}^N Q_j(z)(P(z)-\mu-i0)^{-1} \cdot (\widehat{\delta_j u})(z) \right] = 0$$

の解 $u \in H_{-\rho}^m$ を μ に付随した一般固有関数という。
 μ に付随する恒等的に零ではない一般固有関数が存在するとき μ を一般固有値という。

定義から直ちに次のことがわかる: (i) 一般固有関数 u は方程式 $Hu = \mu u$ を distribution の意味で満たす; (ii)

固有関数は一般固有関数である; (iii) μ に付随する^(一般)固有関数の全体 E_μ は有限次元ベクトル空間を成す。 E_μ は λ に依存して定義されているが、多くの場合 λ には依存しない。例えば次の定理が成り立つ。

定理 仮定 (A) 及び次の仮定 (E) が満たされるとする。

(E) $\alpha + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) > 0$ なる α 及び $1 \leq p \leq 2$ が存在して、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\varphi Q_j (P - \mu)^{-1} \in B_{p, \infty}^{\alpha + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n), \quad j = 1, \dots, N.$$

このとき、 $2\lambda > \max(\frac{n}{2} - \alpha, 1)$ ならば、 μ に付随する一般固有関数は次の評価を満たす。

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C R^{-\alpha}, \quad R > 0.$$

例 $H = -\Delta + q(x)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 3$) とする。もし実数値関数 q がある $\lambda > 1$ に対して $(1+|x|^2)^{-\lambda} q(x) \in L_\infty$ を満たすならば、零に付随する一般固有関数 u は

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |(1-\Delta) u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C R^{2 - \frac{n}{2}}, \quad R > 0$$

を満たす。

2.3. 主要定理 仮定 (A) 及び 次の仮定 (B), (C) が満たされるとする。

(B) $\Lambda(P)$ の近傍で 1 に等しい関数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が存在して次の (1), (2) が成り立つ。

$$(1) \exists \sigma > 0 \text{ \& } 1 \leq \exists p \leq 2 \text{ n.t.}$$

$$\varphi \delta(P-\lambda) \cdot \in B_{p,\infty}^\sigma(\mathbb{R}; B(H^\sigma, H^{-\sigma})).$$

$$(2) \exists q \geq p \text{ n.t. } \sigma - \frac{1}{q} > 0 \text{ \&}$$

$$\varphi Q_j \delta(P-\lambda) \cdot \in B_{q,\infty}^\sigma(\mathbb{R}; B(H^\sigma, H^{-\sigma})).$$

(C) (1) 任意の $\mu \in \Lambda(P)$ は H の一般固有値ではない;

(2) H の固有値は $(\lambda_0, \infty) \setminus \Lambda(P)$ には存在しない
($\lambda_0 = \min P(\xi)$).

このとき、 φ が H の任意の固有関数と直交するならば、次の評価が成り立つ。

$$\left[\int_t^{2t} \left\{ \int |e^{i\tau H} \varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-\rho} dx \right\}^{\frac{r}{2\theta}} d\tau \right]^{\frac{\theta}{r}}$$

$$\leq C_\varepsilon t^{-\sigma_\varepsilon} \|\varphi\|_{H_{\rho,\varepsilon}^{(1+\varepsilon)\theta}}, \quad t > 1, \quad \frac{1}{r} \leq 1 - \frac{1}{p},$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad \varepsilon > 0.$$

但し、 C_ε は ε のみに依存する定数。

§3. Schrödinger 方程式

重要定理は仮定(C)のもとでは g 及び φ の $|x| \rightarrow \infty$ での減衰度に応じて $e^{itH}\varphi$ の局所エネルギーの $t \rightarrow \infty$ での減衰度がよくなることを意味している。

Schrödinger 作用素 $H = -\Delta + g(x)$ を $L_2(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 3$) を考えよう。ここで g は非負関数である $\rho > 1$ に対し $(1+|x|^2)^\rho g(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ を満たすものとす。このとき仮定(A) 及び (C) が成り立つので、

$\delta(|x|^2 - \lambda)$ の正則性を調べることによる次の評価 (i) ~ (iii) を得る。

(i) $1 < \rho \leq \frac{n}{2}$ のとき、任意の $r \in (2, \infty]$ に対して定数 C_r が存在して

$$\left[\int_t^{2t} \left\{ \int |e^{i\tau H} \varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-\rho\theta} dx \right\}^{\frac{r}{2\theta}} d\tau \right]^{\frac{\theta}{r}} \leq C_r t^{-(\rho-\frac{1}{2})\theta} \|\varphi\|_{H_{\rho\theta}^{(q+\varepsilon)\theta}}, \quad t > 1.$$

(ii) $\frac{n}{2} < \rho \leq \frac{n+1}{2}$ のとき、定数 C が存在して

$$\left[\int_t^{2t} \left\{ \int |e^{i\tau H} \varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-\rho\theta} dx \right\}^{\frac{r}{2\theta}} d\tau \right]^{\frac{\theta}{r}} \leq C t^{-(\rho-\frac{1}{2})\theta} \|\varphi\|_{H_{\rho\theta}^{(q+\varepsilon)\theta}}, \quad t > 1, \quad \left(\frac{n+1}{2} - \rho\right)^{-1} \leq r \leq \infty.$$

(iii) $\rho > \frac{n+1}{2}$ のとき, 定数 C が存在して

$$\left[\int |e^{itH} \varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}\theta} dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C t^{-\frac{n}{2}\theta} \|\varphi\|_{H_{\frac{n+1}{2}\theta}^{(1+\varepsilon)\theta}}, \quad t > 1.$$

注意 S. Steinberg [4] はある $\alpha > 0$ に対し $g(x)e^{\alpha|x|} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ となる場合を考察して次の結果を得ている: 仮定 (C.1) のもとで, φ が H の任意の固有関数に直交する “いい” 関数ならば

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |e^{itH} \varphi(x)|^2 e^{-\alpha|x|} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C t^{-1}$$

が成り立つ。

参考文献

- [1] Kuroda, S. T., Scattering theory for differential operators, I, II, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 75-104, 222-234.
- [2] Muramatsu, T., On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a

general region, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.,
9 (1974), 325-346.

- [3] Murata, M., Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators, submitted to J. Math. Soc. Japan or Japanese J. Math..
- [4] Steinberg, S., Local time decay for solutions of the Schrödinger equation and the wave equation, Arch. Rath. Mech. Anal., 54 (1974), 134-147.