

スペクトラム解析のあま一般化

阪大 基礎工 谷口 正信

§ 0. 序

通常の $+$ operation による時間 parameter の translation で k 次の moments が不変である random process は k 次の弱定常過程とよばれる。これに対して Morettin [5] は dyadic translation によって k 次の moments が不変である process を dyadic stationary process of order k と呼んだ。

通常の k 次の弱定常過程に対して, k 次の spectrum of order k は k th order moments の Fourier 変換として定義された。これらの統計的解析は (Brillinger-Rosenblatt [1], Rosenblatt-Van Ness [8]) 等にある。一方 dyadic stationary process of order k に対して Morettin [5] はこの k th order moments を Walsh-Fourier 変換して, Walsh spectrum of order k を定義した。ここでは, この Walsh spectrum of order k の consistent estimate を与える。しかしこのことは, 更に一般的な立場から議論が, 行

なされる。すなわち ある適当な translation operation $\oplus$ による "ずらし" で R 次の moments が不変である process を定義する。これを $\oplus$ -stationary process と呼ぶ。

一方この process に対して、 R 次の moments をその character group の上で Fourier 変換を行って、これを R 上で一般化した spectrum (generalized spectrum of order k) と呼ぶ。そして、この spectrum の consistent な推定量をつくる。

§1. Weakly $\oplus$ -stationary process.

R を $(-\infty, \infty)$ もしくは $[0, \infty)$ とする。そして R を通常の real line の topology をもつ topological space とする。ここで R に operation $\oplus$ を定義する。任意の $x, y \in R$ に対して、operation $\oplus$ は次の条件をみたすとする。
(1.1) - (1.8)

(1.1) for any $x, y \in R$, $x \oplus y \in R$;

(1.2) for any $x, y \in R$, $x \oplus y = y \oplus x$;

(1.3) for any $x, y, z \in R$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(1.4) for any $x \in R$ and for $0 \in R$, $x \oplus 0 = x$;

(1.5) for each $x \in R$, $\exists$ a unique inverse element $\tilde{x} \in R$ such that $x \oplus \tilde{x} = 0$;

(1.6) for any $x, y \in R$ the mapping $(x, y) \rightarrow x \oplus \tilde{y}$ is R の topology に 関して連続;

(1.7) for any $x \in R$, for any Borel set A on R . $|A| = |A_x|$,

ただし $A_x = \{z \mid z = x \oplus y, y \in A\}$, 又 $|\cdot|$ は Lebesgue Measure を表す;

(1.8) for any $x, y \in R$, $\exists$ sequence $\{B_T\}$ such that $B_T \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ and

$$B_T^{-1}(x \oplus y) = (B_T^{-1}x) \oplus (B_T^{-1}y), \text{ for all } x, y \in R.$$

注意) (1.8) では, 一般に分配律 $c(x \oplus y) = (cx) \oplus (cy)$,

$\forall c, x, y \in R$ は成立しないので, 分配律が適当な数列

に対しては成立する二つを要請している。また integer T

はすべての non-negative integers をわたるとは限らずに

すなわち, sequence $\{T\}$ は 適当な subsequence of all non-negative integers を表わすとする。

Example 1. Ordinary-plus case. $\oplus = +$ (通常のプラス) とし, $R = (-\infty, \infty)$ とすれば (1.1) - (1.8) はみたされる。

Example 2. Dyadic case. $x, y \in$ non-negative real numbers の 次の dyadic expansion を もつとする。

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k 2^k, \quad x_k = 0 \text{ or } 1,$$

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k 2^k, \quad y_k = 0 \text{ or } 1.$$

== τ dyadic translation $\mp$ on R は, 次の式の右辺で定義する。 $x \mp y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k \mp y_k) 2^k,$

== τ $x_k \mp y_k$ は mod. 2 of $\{0, 1\}$ の addition, すなわち $0 \mp 0 = 0, 0 \mp 1 = 1 \mp 0 = 1, 1 \mp 1 = 0,$

== τ $\oplus = \mp$ on R とみれば $R = [0, \infty)$ とすれば, (1.1) - (1.8) はみたされる。ただし (1.8) では

$$B_T = 2^{-h(T)}, \quad h(T) \text{ は } h(T) \rightarrow \infty \text{ as } T \rightarrow \infty$$

で ある様な T は positive integer とすれば, みたされる。

N is set of all integers or all non-negative integers (according as R is $(-\infty, \infty)$ or $[0, \infty)$)

exists. G is group of the elements of R by mod. 1. exists. $\hat{G} = \{ P(n, x) : n \in N, x \in G \}$

and, G is complex function $P(n, x)$ is the following (1.9) - (1.14) exist.

(1.9) for all $n \in N$, $|P(n, x)| = 1$, a.e. $x \in G$;

(1.10) for every $n \in N$ and for each $y \in G$,
 $P(n, x) P(n, y) = P(n, x \oplus y)$, a.e. $x \in G$;

(1.11) for every $m, n \in N$,
 $P(m, x) P(n, x) = P(m \oplus n, x)$, a.e. $x \in G$;

(1.12) $P(n, x)$ is $\oplus$ -continuous at $x \in G$, i.e.

for any $\eta > 0$, $\exists \delta > 0$ $|h| < \delta \Rightarrow$

$$|P(n, x \oplus h) - P(n, x)| < \eta.$$

1.13) the set $M_T = \{0, 1, \dots, T-1\}$ generates N ,

i.e. $N_T = \{t : t = m \oplus \tilde{n} ; m, n \in M_T\} \rightarrow N$

as $T \rightarrow \infty$;

(1.14)

$$D_T(x_j) = \begin{cases} T & \text{if } j=1 \\ 0 & \text{if } j=2, \dots, T, \end{cases}$$

==

$$D_T(x) = \sum_{k=0}^{T-1} P(k, x) \text{ and } x_j = \frac{j-1}{T}.$$

Example 1. Ordinary-plus case, $P(m, x) = \exp(2\pi i m x)$ とすれば (1.9) - (1.14) はみたしうる。

Example 2. Dyadic case. まず Walsh functions $\{W(m, x) : m=0, 1, \dots\}$ を次の様に定義する。

$$(1.17) \quad W(0, x) \equiv 1, \quad x \in G;$$

$$(1.18) \quad W(m, x) = RD(m_1, x) \cdots RD(m_r, x), \text{ for } m = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_r}, (m_{i+1} < m_i), \text{ where } RD(j, x) = Rd(2^j x) \\ Rd(x+1) = Rd(x), \text{ and } Rd(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & , 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

== $P(m, x) = W(m, x)$, $\oplus = +$ とおけば条件 (1.9) - (1.14) はみたしうる。ただし (1.13) (1.14) は $T = 2^n$ (n is positive integer) に対してのみみたしうる。

※ Fine (2).

以後 r -vector valued process $X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))'$

$t \in \mathbb{N}$, を扱う。そして $X_a(t)$, $a=1, \dots, r$ に対してすべての order のすべての moment が存在するとする。

定義 $\{X(t) : t \in \mathbb{N}\}$ が k -th order weakly $\oplus$ -stationary $\iff \sum X(t) = 0$,

$$\sum \{X_{a_1}(u_1 \oplus t) \cdots X_{a_{k-1}}(u_{k-1} \oplus t) X_{a_k}(t)\} = R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$$

(say)

は、 t に無関係, for all $u_1, \dots, u_{k-1}$, $t \in \mathbb{N}$,

$a_j \in \{1, \dots, r\}$.

仮定

$$(1.19) \sum_{u_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{u_{k-1} \in \mathbb{N}} |R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty.$$

定義 $f_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$

$$= \sum_{u_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{u_{k-1} \in \mathbb{N}} R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} P(u_j, x_j).$$

を generalized spectrum of order k と呼ぶ。

2. Estimation. $\{X(t) = (X_{a_1}(t), \dots, X_{a_k}(t))'\}$,

$t=0, \dots, T-1\}$ を $\oplus$ -stationary process of order k の observation とする。次の statistic を定義する。

$$I_{a_1 \dots a_k}^{(T)}(x_1, \dots, x_k) = T^{-1} \prod_{j=1}^k \sum_{t=0}^{T-1} X_{a_j}(t) P(t, x_j).$$

$K(u_1, \dots, u_k) \in \oplus$ -continuous function τ .

$$|K(u_1, \dots, u_k)| \leq A, \text{ if } \forall |u_j| \leq 1, j=1, \dots, k, \\ = 0, \text{ otherwise,}$$

$$K(u_1, \dots, u_k) = K(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k),$$

$$\& \int \dots \int K(u_1, \dots, u_k) H(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k = 1,$$

A is positive constant τ .

$$H(u_1, \dots, u_k) = 1, \text{ if } u_1 \oplus \dots \oplus u_k = 0 \& u_{k_1} \oplus \dots \oplus u_{k_j} \neq 0 \\ \{k_1, \dots, k_j\} \subsetneq \{1, \dots, k\},$$

$$= 0, \text{ otherwise.}$$

$\{B_T\} \in (1.8) \& \exists T \in \mathbb{R}$ real number of sequence

$$\tau \quad TB_T \rightarrow \infty, \dots, TB_T^{k-1} \rightarrow \infty \text{ as } T \rightarrow \infty \text{ とする.}$$

$$K_T(u_1, \dots, u_k) = B_T^{-k+1} K(B_T^{-1}u_1, \dots, B_T^{-1}u_k) \text{ とおく.}$$

τ $f_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$ の推定量として,

$$\hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}) = T^{-k+1} \sum_{n_1 \in N_T} \dots \sum_{n_k \in N_T} I_{a_1 \dots a_k}^{(\tau)}(x_1 \oplus \frac{n_1}{T},$$

$$\dots, x_k \oplus \frac{n_k}{T}) K_T(n_1/T, \dots, n_k/T) H(n_1/T, \dots, n_k/T),$$

$T \in \mathbb{N}$ $x_1 \oplus \dots \oplus x_k = 0$, と提案する。

$$c_{a_1 \dots a_m}(u_1, \dots, u_{m-1}) = \text{cumulant } \{X_{a_1}(u_1 \oplus \tau), \dots, X_{a_{m-1}}(u_{m-1} \oplus \tau),$$

とおく,

$$X_{a_m}(\tau)\},$$

integer u に対して

$$\|u\|_T = T - \#\{t : 0 \leq t \leq T-1, 0 \leq t \oplus u \leq T-1, \\ t \text{ being an integer}\},$$

$\#\{.\}$ は $\{.\}$ の中の element の個数を表す。

仮定

$$(2.1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{u_1 \in N_T} \cdots \sum_{u_{m-1} \in N_T} \|u_j\|_T |C_{a_1 \cdots a_m}(u_1, \dots, u_{m-1})| < \infty,$$

for any j , $1 \leq j \leq k$, and any $1 \leq m \leq k$.

定理 1.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(\hat{f}_{a_1 \cdots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})) = f_{a_1 \cdots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

定理 2.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{k-1} \cdot T \operatorname{Var}(\hat{f}_{a_1 \cdots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})) \\ = \sum_P \int \cdots \int K(y_1, \dots, y_k) K(y_{P(1)}, \dots, y_{P(k)}) H(y_1, \dots, y_k) dy_1 \cdots dy_k \\ \times \prod_{j=1}^k f_{a_j, a_{P(j)}}(x_j), \quad (x_1 \oplus \cdots \oplus x_k = 0),$$

ここで $\sum_P$ は $(1, \dots, k)$ のすべての permutation について。

また $f_{a_j, a_{P(j)}}$ は generalized spectrum of order 2. を表す。

定理 3.

$(B_T^{k-1} T)^{1/2} \{ \hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}) - E \hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}) \}$
は漸近的に平均 0 で分散は定理 2 で与えられる
正規分布に従う。

結論 通常の k 次の stationary process に対しては

定理 1-3 の結果は, Brillinger-Rosenblatt [1] に
reduce される。また dyadic stationary process
of order k に対しては, $T = 2^m$, $B_T = 2^{-h(T)}$ の
型にとることによって $\hat{f}_{a_1 \dots a_k}$ に対する定理 1-3 の
結果を得る。ただし 仮定 (2.1) は $\|u_j\|_T \equiv 0$, for
 $T = 2^m$ であるので自動的にみたされる。

3. Dyadic Stationary Process の AR 表現と MA 表現.

Dyadic Stationary な有限 AR process は有限 MA 表現が
可能であることは, 永井 (1976) で報告されているが, この
ことは explicit に次の形で表わせることがわかる。

有限 AR dyadic stationary process, $\sum_{k=0}^p a_k X(m+k) = u(m)$,
 $u(m) \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$. ($p = 2^m - 1$ の型とする.) において,

$a_0 + a_1 W(1, x) + \dots + a_p W(p, x) \neq 0$, a.e. $x \in G_T$,

であるとき この process $X(m)$ は正則条件をみたすと言う
ことにする。

命題 1.

$$\det \{ a_{i+j} \}_{i,j=0,\dots,p} = \prod_{j=0}^p \left(\sum_{k=0}^p a_k W(k, x_j) \right)$$

$$x_k = \frac{k}{p+1}, \quad k=0, \dots, p.$$

よって Walsh 関数の性質より,

$$\text{正則条件} \iff \det \{ a_{i+j} \} \neq 0$$

を得る。

命題 2. 有限 AR dyadic stationary process $X(n)$ は, 正則条件のもとで $X(n) = \sum_{k=0}^p b_k u(n+k)$ と表わせる。

ただし $(b_0, \dots, b_p)$ は

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \dots a_{i+j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

の unique 解。

REFERENCES

- [1] BRILLINGER, D.R., and ROSENBLATT, M. (1967).
Asymptotic theory of estimates of k -th order spectra.
Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series
(Harris, ed.). Wiley, New York. 153-188.
- [2] FINE, N.J. (1949). On the Walsh functions.
Trans. Am. Math. Soc. 65. 372-414.
- [3] HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory*.
D. Van. Nostrand Co., New York.
- [4] LEONOV, V.P., and SHIRYAEV, A.N. (1959). On a method of calculation
of semi-invariant.
Theor. Prob. Appl. 4. 319-329.

[5] MORETTIN, P.A. (1974). Walsh-Function analysis of certain class of time series. *Stochastic Processes and their Applications*. 2. 183-193.

[6] NAGAI, T. (1976). Dyadic stationary processes and their spectral representations. *Bull. Math. Statist.* 17. (to appear).

[7] PONTRJAGIN, L.S. (1939). *Topological Groups*. Princeton Univ. Press.

[8] ROSENBLATT, M., and VAN NESS, J.W. (1965). Estimation of the bispectrum. *Ann. Math. Statist.* 36. 1120-1136.

[9] RUDIN, W. (1962). *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers. New York and London.

[10] CHRESTENSON, H.E. (1955). A class of generalized Walsh functions, *Pacific J. Math.* 5. 17-31.

[11] 永井武昭 (1976). Dyadic 定常過程のスペクトル表示とその線形模型について. 日本数学会予稿集. (東工大).